Postbus 2041
7500 CA Enschede
www.taalenrekenen.nl

Over de drempels met rekenen

Over de drempels met rekenen

Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen

Onderdeel van de eindrapportage van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen

expertgroep doorlopende leerlijnen TAAL EN REKENEN

Over de drempels met rekenen

Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen

Onderdeel van de eindrapportage van de Expertgroep
Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen

Inhoud

1 Inleiding

Binnen de algemene uitgangspunten is voor rekenen en wiskunde een uitwerking gemaakt die recht doet aan het specifieke karakter van het vakgebied. De opdracht is om voor het niveau van rekenen en wiskunde heldere referentieniveaus in kaart te brengen voor leerlingen van 12 jaar, 16 jaar en omstreeks 18 jaar. Daarbij is de beschrijving in grote lijnen beperkt tot wat in het spraakgebruik *rekenen* wordt genoemd, wat wettelijk en in examenprogramma's een subdomein is van het schoolvak rekenen en wiskunde (po) of wiskunde (vo en mbo). Binnen dat gebied van rekenen & wiskunde zijn vier subdomeinen geselecteerd, die samen het overgrote deel van de relevante inhouden overdekken.

Het zijn:
1. Getallen
2. Verhoudingen
3. Meten en Meetkunde
4. Verbanden

De keuze voor deze vier subdomeinen wordt toegelicht in hoofdstuk 5. De beschrijving in woorden van wat leerlingen moeten kennen en kunnen op een bepaald referentieniveau is onvoldoende om de onderwijspraktijk daarop af te stemmen. De operationalisering in termen van beheersingsniveaus wordt exemplarisch toegelicht met voorbeeldopgaven, die voor een groot deel ontleend zijn aan onderzoeksprojecten en examens, zodat de haalbaarheid van het bedoelde niveau goed kan worden ingeschat. De werkwijze en ambities staan beschreven in hoofdstuk 6. De operationaliseringen voor de vier gekozen subdomeinen staan in de hoofdstukken 7 tot en met 10.

Een kenmerk van rekenen & wiskunde is de cumulatieve structuur van het vakgebied waarin begrippen en rekenprocedures op elkaar voortbouwen. Een voorwaarde voor het kunnen verwerven van nieuwe kennis en vaardigheden is de beheersing van de begrippen en methoden waarop wordt voortgebouwd. Het voortbouwen op bestaande kennis kan gaan in de richting van het *functioneel gebruiken* in allerlei situaties uit het dagelijks leven, uit andere vakgebieden en uit praktijk- of beroepssituaties. Dat voortbouwen kan ook een verder *verdiepen* zijn van de bestaande kennis in de richting van formaliseren, abstraheren en generaliseren, aansluitend bij de wiskundevakken in het voortgezet onderwijs. Daarom zijn in het voortgezet onderwijs voor het rekenen twee *sporen* te onderscheiden met verschillende accenten, namelijk het F-spoor (fundamentele kwaliteit) van *functioneel gebruiken* en het S-spoor (streefkwaliteit) van formaliseren generaliseren en abstraheren, samengevat met de term *verdiepen*.

Het F-spoor loopt vanaf het basisniveau op 12-jarige leeftijd (1F, fundamentele kwaliteit) naar het burgerschapsniveau op 16-jarige leeftijd (2F, fundamentele kwaliteit), met een mogelijke verbreding of toespitsing naar de leeftijd van omstreeks 18 jaar (3F, fundamentele kwaliteit). Niveau 2F beschouwen we als het niveau dat alle Nederlanders zouden moeten beheersen om op het gebied van rekenen maatschappelijk goed te kunnen functioneren.

Het S-spoor loopt vanaf het streefniveau op 12-jarige leeftijd (1S, streefkwaliteit) naar het streefniveau op 16-jarige leeftijd 2S, met een mogelijke doorloop naar 3S, omstreeks 18 jaar. Dit andere spoor wordt in de bovenbouw van het basisonderwijs door het grootste deel van de leerlingenpopulatie gevolgd en verzorgt mede de aansluiting bij de wiskundevakken in vmbo TL, havo-vwo en mbo en bij het gebruik van rekenen en wiskunde in andere vakken. We spreken dan over niveaus 1S (streefkwaliteit), 2S (streefkwaliteit) en 3S (streefkwaliteit), die op elkaar aansluiten en die de basisniveaus overlappen. Bij 3S gaat het om het (nieuw voorgestelde) rekendomein van het vak wiskunde A in de havo-bovenbouw of om enkele technische richtingen in het mbo. Bij de overgangen tussen schooltypen stappen leerlingen deels over van het ene spoor naar het andere spoor, bijvoorbeeld van 2S (vmbo TL) naar 3F (mbo-4), maar ook van 2S (vmbo TL) naar 3S (4 havo).

Voordat in hoofdstuk 4 de beschrijving van de inhoud van de referentieniveaus wordt toegelicht, is het noodzakelijk om duidelijk te maken wat met de te gebruiken termen en omschrijvingen wordt bedoeld. In hoofdstuk 2 hebben we daarom kort weergegeven wat de verschillende typen leerdoelen in het rekenen & wiskundeonderwijs zijn, zoals die nationaal en internationaal breed worden erkend. De onderliggende betekenis van termen en woorden die worden gebruikt voor een beschrijving van die doelen en kwaliteiten die in het wiskundeonderwijs worden nagestreefd, verschillen evenwel. In hoofdstuk 2 staan de door ons gebruikte kwaliteiten, begrippen en termen gedefinieerd en beargumenteerd. Vervolgens gaan we daar in op het *consolideren, gebruiken* en *verdiepen*.

We zien voldoende aanknopingspunten om door middel van de beschreven referentieniveaus een positieve impuls te geven aan kwaliteitsverbetering in het onderwijs. Wij zien mogelijke verbeterpunten bij:

- het *consolideren* van een kern aan kennis en vaardigheden tot op een *hoog niveau van beheersing*
- het blijvend *onderhouden* van die kennis en vaardigheden binnen scholen en bij overgangen tussen schooltypen,
- het *gebruiken* van die verworven kennis en vaardigheden juist ook buiten de lessen rekenen en wiskunde
- het realiseren van mogelijkheden tot *verdiepen* voor leerlingen die (veel) meer aan kunnen dan het huidige onderwijsaanbod hen aanreikt.

In hoofdstuk 3 formuleren we aanbevelingen voor de huidige leerlijnen rekenen en wiskunde, met name wat betreft het onderhouden van kennis en vaardigheden.

Voordat naar algemene uitspraken en oplossingen van (vermeende) problemen wordt gezocht, is een goede probleemanalyse noodzakelijk. Is er echt iets verontrustends aan de hand in het onderwijs, zo ja wat dan, hoe groot is het probleem, wat zeggen de data, welke problemen zijn via onderwijs aan te pakken, wat is de invloed van de omgeving, de maatschappij, enzovoort. In het eerste hoofdstuk wordt een korte analyse van het reken- en wiskundeonderwijs gegeven van de kwaliteit van het Nederlandse rekenen & wiskunde onderwijs, wat leidt tot een aantal aandachtspunten voor de adviezen en voorstellen in de volgende hoofdstukken van dit rapport.

‘Als je op de pabo kijkt is het wel duidelijk dat er in het vmbo en mbo te weinig tijd aan rekenen wordt besteed’

1 Analyse van het reken- en wiskundeonderwijs

De twee laatste decennia is veel nationaal en internationaal onderzoek uitgevoerd over de kwaliteit naar het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs. De expertise binnen de Expertgroep is aangevuld met een tweetal adviesaanvragen van externe deskundige wetenschappers inzake het internationaal onderzoek (Dr. P. Vos) en het nationaal onderzoek (Dr. E.G. Harskamp). Zie bijlagen A en B.

1.1 Internationaal vergelijkend onderzoek

Dr. P. Vos vat haar bevindingen als volgt samen:
Overzicht van sterke en zwakke punten van de prestaties van Nederlandse tweede klas leerlingen voortgezet onderwijs, zoals af te leiden uit SIMS en TIMSS (1982-2003)

Sterke punten
- hoge internationale score over de gehele linie van de toetsen, Nederlandse leerlingen scoren hoger dan omringende landen, met uitzondering van Vlaanderen
- hoge score constant over de jaren sinds 1982
- een relatief hoge score op de gebieden rekenen en statistische verwerking
- hoge score van de 'zwakkere' leerlingen relatief t.o.v. de 'gemiddelde' leerlingen
- let wel: de 'gemiddelde leerling' is statistisch gezien een meisje op het vmbo-t.

Zwakke punten
- relatief t.o.v. de totaalscore een lagere score op algebra en meetkunde (maar nog steeds een hoge internationale score)
- een lage score van de 'betere' leerlingen relatief ten opzichte van de 'gemiddelde' leerlingen
- binnen het rekenen-gebied een zwak punt geconstateerd bij opgaven over 'bewerkingen op breuken' (maar niet op het gehele gebied van 'breuken')
- binnen het algebra-gebied een zwak punt geconstateerd bij opgaven die vragen om 'mathematiseren'

In haar slotconclusie merkt Dr.P. Vos op:
'Een slag om de arm met betrekking tot toekomstige ontwikkelingen blijft gewenst. Mijn waarschuwing baseer ik op het volgende: binnen TIMSS 1995 en TIMSS 2003 werden ook de leerlingen in groep 6 getest. De Nederlandse leerlingen deden het ook op dit niveau erg goed in internationaal perspectief: ze eindigden direct achter Japan en Vlaanderen. Opmerkelijk was echter, dat er een kleine achteruitgang gemeten werd tussen de resultaten van 1995 en 2003. Het verschil was klein, maar wel significant. Deze leerlingen uit groep 6 in 2003 zullen merendeels vier jaar later in de tweedeklas VO zitten. Het is dus niet uitgesloten dat de prestaties van dit cohort tweedeklassers ook iets lager gaat uitvallen. Helaas zal dit echter niet gemeten kunnen worden, doordat Nederland in 2007 niet aan dat deel van het onderzoek meedoet.'

De opgaven van TIMSS zijn voornamelijk 'kaal', binnen een rekensituatie of een wiskundige probleemstelling. Omdat een aantal landen, waaronder Nederland en Duitsland, met dat type opgaven niet erg tevreden was, is door de OESO het onderzoeksproject PISA gefinancierd, waarin een wiskundige geletterdheid van 15-jarigen wordt gemeten. Veel opgaven zijn van het type dat in dit rapport "*functioneel gebruiken*" wordt genoemd met enige uitloop naar "*weten waarom*" of "*verdiepen*". In het voorjaar van 2003 vond er in OESO-verband een groot onderzoek plaats naar de staat van onder andere de wiskundige geletterdheid in zo'n veertig landen, afgekort tot PISA. Eind 2004 verschenen de eerste nationale en internationale rapporten en met steun van het ministerie van OCW werd voor Nederland en de Nederlandse onderwijstypen een secundaire analyse uitgevoerd, die in 2006 is gepubliceerd. Voor de resultaten en interpretaties verwijzen we naar dat rapport *"Wiskundige geletterdheid volgens PISA."*[7] In de totaalscore gaat Finland voorop, gevolgd door Zuid-Korea en Nederland. (Wordt Vlaanderen er afzonderlijk uitgelicht dan staat Vlaanderen aan de top.) In de recent verschenen onderzoeksresultaten PISA 2006 is Nederland gezakt van plaats 3 naar plaats 5 in de rangorde van landen, maar scoort nog steeds hoger dan alle andere Europese landen, uitgezonderd Finland. De meisjes scoren nu significant

lager dan in PISA 2003.
De eerder genoemde analyse in *"Wiskundige geletterdheid volgens PISA"* is bijzonder relevant voor de opdracht van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, met name voor de bepaling van het referentieniveau 2F, het algemeen maatschappelijk niveau of het burgerschapsniveau. PISA is namelijk gericht op 15-16- jarigen en levert dus informatie op voor dat tweede referentieniveau. (De beperking is dat het schoolse pen-en-papier toetsen zijn.) De opgaven zijn verdeeld in zes vaardigheidsniveaus met opklimmende moeilijkheidsgraad.
In Nederland scoort 48% van de leerlingen in PISA 2003 op niveau 4 of hoger, wat vergelijkenderwijs niet slecht is, maar volgens het Cito-rapport zeker geen reden tot tevredenheid is als we kijken naar de beschrijving van de vaardigheidsniveaus en de ambities om Nederland als kennisland te ontwikkelen.
Gemiddeld staat Nederland er in dit vergelijkend onderzoek goed voor, dankzij relatief goede scores in de onderste helft, maar de bovenste helft van de scores is te mager bezet.
In termen van ons rapport:
- Het percentage leerlingen dat op het tweede referentieniveau de basiskwaliteit 2F bereikt is bevredigend.
- Het percentage leerlingen dat op het tweede referentieniveau de streefkwaliteit 2S bereikt is niet bevredigend.

Op grond van deze twee internationaal geaccepteerde vergelijkende onderzoeken concluderen wij dat er over de gehele breedte geen reden is om aan te nemen dat de kwaliteit van het Nederlandse onderwijs in rekenen & wiskunde beneden de maat is van wat van een ontwikkelde natie mag worden verwacht. In die lange periode zijn er geen substantiële veranderingen in de positie van Nederland opgetreden. Evenwel moet worden bedacht dat TIMSS (contextarme opgaven) en PISA (vooral *functioneel gebruiken*) op een eenvoudig niveau en over de gehele breedte van de populatie die kwaliteit in kaart hebben gebracht. Over de prestaties van de best presterende leerlingen (de top-20%) zeggen deze twee onderzoeksprojecten weinig, wegens de eenvoud van de opgaven. Een punt van zorg lijkt de lichte daling van de prestaties van de groep leerlingen, die nu in het voortgezet onderwijs verblijven, vergeleken met enige jaren geleden. (Zie Vos en PISA 2007.) Gesignaleerde zwakke punten verdienen bijzondere aandacht, maar niet ten koste van de sterke punten. Zo komen wij tot onze eerste aanbeveling.

Aanbeveling 1 Gedifferentieerde benadering
Met behoud van de aandacht voor leerlingen voor wie het algemeen maatschappelijk niveau 1F-2F-3F het natuurlijk plafond is, moeten meer leerlingen op het hogere niveau 1S-2S-3S gaan presteren dan nu het geval is.

1.2. Nationaal onderwijsonderzoek

Voor de uitstroom van het Nederlandse basisonderwijs bestaat het zogenaamde PPON, de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau. Voor de nationale sterkte- en zwakte-analyse geeft de vierde *´Balans van het reken- en wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool´* uit 2004 een goed aanknopingspunt. De eerste peiling is gehouden in 1987 en de opzet van de vierde rekenpeiling is in belangrijke mate vergelijkbaar met die van eerdere rekenpeilingen. In het rapport PPON 2004 wordt geconstateerd dat de prestaties voor verhoudingen, breuken en procenten, behorend tot het subdomein *Verhoudingen* in de loop der jaren slechts licht fluctueren.
Hetzelfde geldt voor het subdomein *Meten en Meetkunde*, met een opvallend laag vaardigheidsniveau. Veel leerlingen kennen de herleidingen in het metriekstelsel niet (km <-> m en cm <-> mm en m <-> mm) en zijn niet in staat om berekeningen voor omtrek, oppervlakte en inhoud met succes uit te voeren. Binnen het subdomein *Getallen* is er een duidelijke positieve ontwikkeling van de basale gecijferdheid, maar een duidelijke negatieve ontwikkeling ten aanzien van de bewerkingen met getallen, het rekenen op papier. In de beschrijving van het referentieniveau voor het subdomein *Getallen* wordt aan die ongewenste ontwikkeling speciale aandacht besteed.

Harskamp (2007) oppert een aantal mogelijke verklaringen voor de achteruitgang bij bewerkingen met getallen, zoals minder aandacht en tijd in het onderwijsaanbod voor dat subdomein, een verschuiving naar het gebruik van de rekenmachine en een niet consistente didactiek met teveel mogelijke strategieën. Hij beveelt nader onderzoek aan naar wat er werkelijk in de schoolklassen gebeurt. Veder gaat hij in op de interpretatie van bovenstaand overzicht. Ook de a.s. havo-vwo leerlingen hebben enkele opvallend zwakke punten namelijk het toepassen van de vermenigvuldig- en deelbewerkingen en de samengestelde bewerkingen, het probleemoplossend rekenen met de zakrekenmachine, het lezen van tabellen en grafieken, het meten van lengte, oppervlakte en inhoud en ruimtelijke meetkunde. Bij deze vaardigheden beheersen de hv-leerlingen 50% of minder van de opgaven goed. Voor de havo-vwo-leerlingen geldt dat zij op een aantal reken- en wiskundevaardigheden achterblijven in hun ontwikkeling. Aangezien het deze leerlingen niet aan capaciteiten ontbreekt en zij andere rekenen- en wiskundevaardigheden behoorlijk onder de knie hebben gekregen, moet de oorzaak van deze hiaten in het onderwijs worden gezocht.
Niet alleen voor de zwakste rekenaars, maar ook voor de beste rekenaars valt er door beter uitgebalanceerd onderwijs veel te winnen. Aldus Harskamp. Tenslotte beveelt hij aan om meer referentieniveaus te onderscheiden dan de Expertgroep voorstelt, namelijk:
• uitstroom naar vso: kwaliteit speciaal niveau
• uitstroom naar vmbo: bb en kb: kwaliteit elementair niveau
• uitstroom naar vmbo tgl: kwaliteit basisniveau
• uitstroom naar havo of vwo: kwaliteit streefniveau

De toelichting staat in zijn rapport, de bijlage A.

Zie voor een nadere analyse van de PPON-resultaten ook de artikelen van de onderzoeker Dr. C.M. van Putten, lid van de werkgroep rekenen & wiskunde van de Expertgroep. Op basis van uitwerkingen van leerlingen komen hij en zijn medeonderzoekers tot onder meer de volgende conclusies:
• Bij deelsommen gebruiken de leerlingen uit PPON-2004 minder staartdelingen dan de leerlingen uit PPON-1997 (13% versus 35%), iets vaker andere strategieën (24% versus 21%) en opvallend veel leerlingen maken geen uitwerking op papier (26% in 1997 en 44% in 2004).
• Zwakke rekenaars en jongens maken in 2004 deelsommen vaker zonder uitwerking dan de andere groepen.
• De toename van antwoorden zonder uitwerking komt vooral bij de jongens voor en veel minder bij de meisjes.
• Ongeacht de toegepaste strategie is uit PPON-2004 een algemene daling van de prestatie op deelsommen te constateren.

Op grond van de bestudeerde en gerapporteerde analyses van het uitstroomniveau van het basisonderwijs formuleren wij de volgende aanbeveling:

Aanbeveling 2 Niveauverhoging basisonderwijs
Het basisonderwijs is funderend onderwijs en moet alle leerlingen de kans bieden op een solide basis voor de verschillende daarop volgende leerroutes. Er is een stevige krachtsinspanning nodig om het gewenste hogere niveau op de aangegeven zwakke punten in de kwaliteit van de opbrengst van het basisonderwijs te bereiken.

Aanbeveling 3 Onderzoek naar onderwijspraktijk po
Voor de verklaring van de gesignaleerde verslechteringen en magere resultaten op onderdelen in het peilingsonderzoek PPON2004 is nader onderzoek noodzakelijk naar wat en hoe er in de praktijk van het basisonderwijs wordt onderwezen.

In het voortgezet onderwijs zijn slechts beperkt onderzoeksgegevens beschikbaar over het prestatieniveau in taal en rekenen tijdens de middelbare schoolperiode door de jaren heen. Het VOCL (Voortgezet Onderwijs Cohort Leerlingen) volgt een groep leerlingen gedurende een aantal jaren en geeft de mogelijkheid om over een periode van tien jaar voor- en achteruitgang van de prestatieniveaus na te gaan. Het recente onderzoeksverslag (Kuyper en van der Werf 2007 [4)]) concludeert dat voor wiskunde de leerlingen binnen de reguliere leerwegen van het vmbo er sinds 1993 aanzienlijk op vooruit zijn gegaan, terwijl voor de overige niveaus de verschillen klein zijn. Dat resultaat loopt in de pas met de hiervoor geformuleerde *Aanbeveling 1*. Het lijkt wenselijk om ook voor het voortgezet onderwijs een langlopend onderzoeksproject als PPON op te zetten om door de jaren heen het onderwijsveld, de scholen en de overheid adequaat en gefundeerd te informeren over de ontwikkeling van de leeropbrengst in de basisvaardigheden van taal en rekenen.

Aanbeveling 4 Peilingsonderzoek naar opbrengst voortgezet onderwijs Analoog aan PPON voor het po is het wenselijk om ook voor het vo een langlopend peilingsonderzoek op te zetten om betrouwbare informatie te verkrijgen over de opbrengst voor de basisvaardigheden taal en rekenen.

2 Consolideren- gebruiken- verdiepen

2.1 Wat en voor wie?

In dit rapport staan twee vragen centraal, namelijk het *Wat?* en *Voor wie?*. *Wat* moet de inhoud zijn van rekenen & wiskunde, beschreven in termen van te verwerven kennis en vaardigheden, die voor een bepaalde doelgroep, *Voor wie?*, relevant is. Over de derde vraag, namelijk *Hoe dan?*, de manier waarop die kennis, inzicht en vaardigheden in een onderwijsproces kunnen worden verworven, gaat het niet in dit advies. Wel heeft de werkgroep bij het maken van keuzes voor de beantwoording van de vragen over het *Wat?* en *Voor wie?* bij voortduring de haalbaarheid (een aspect van het *Hoe?)* van de voorgestelde inhouden en leerdoelen meegewogen.

Het onderwijs in rekenen & wiskunde heeft tot doel een zeker repertoire aan kennis, inzicht en vaardigheden te ontwikkelen, waarin verschillende componenten zijn te onderscheiden.
Wij onderscheiden:

1. *Paraat hebben* van feiten en begrippen, routines, technieken, vaardigheden.
2. *Functioneel gebruiken* van kennis in een goede probleem-aanpak, het toepassen, het gebruiken binnen en buiten het schoolvak.
3. *Weten waarom*, het begrijpen en verklaren van concepten en methoden, het formaliseren, abstraheren en generaliseren, het blijk geven van overzicht.

Een verwante indeling is gebaseerd op gangbare theorie over cognitieve processen en is gebruikt in Nederlandse publicaties. De indeling van PISA 2003 volgt in grote lijnen hetzelfde onderscheid.

Naast deze toetsbare componenten van kennis en vaardigheden zijn er meer aspecten van belang in goed onderwijs. Voor het bereiken van een goede kwaliteit van onderwijs en een goede opbrengst is het essentieel dat leerlingen leren reflecteren op hun eigen kennis en aanpak en zelfvertrouwen ontwikkelen. Het gaat dan om het ontwikkelen van een positieve houding ten aanzien van het leren van rekenen en wiskunde; het is interessant, het geeft voldoening en ik kan het. Met recht kunnen deze streefdoelen zelfs voorwaardelijk worden genoemd voor het verwerven van de andere componenten. Of zoals Adriaan de Groot het in 1980 formuleerde:
'Een school waarin de leraren er niet in slagen leerlingen te laten ervaren dat leren leuk en bevredigend kan zijn, zo'n school deugt niet. Een belangrijker onderwijsdoelstelling dan 'leren leuk gaan vinden' zou ik niet weten. Lukt dat niet dan is eigenlijk alles verloren.'

Dit zijn streefdoelen in elk goed onderwijsproces, maar ze laten zich niet formuleren in termen van te behalen en te toetsen leerdoelen. Wel is het evident dat moeizame overgangen tussen verschillende schooltypen veelal ook iets te maken hebben met een verschil in benadering van deze beide aspecten. We constateren dat het nieuwe wiskundeprogramma 12-16, tegelijk met de basisvorming ingevoerd, een veel positiever houding van leerlingen in het vmbo en de onderbouw havo-vwo ten opzichte van het schoolvak wiskunde teweeg heeft gebracht dan voorheen het geval was. Daar ligt voor die doelgroep in Nederland geen knelpunt.

Het onderscheid tussen de drie componenten *paraat hebben*, *functioneel gebruiken* en *weten waarom* speelt een essentiële rol bij de nadere beschrijving en invulling van de referentieniveaus. Het volgende voorbeeld maakt de betekenis van dat onderscheid voor de beschrijving van referentieniveaus duidelijk.

2.2 Een voorbeeld uit een pabo-onderzoek

Om duidelijk te maken wat de strategie is waarmee de drie genoemde componenten van kennis, inzicht en vaardigheid worden gekoppeld aan referentieniveaus, werken we nu één voorbeeld van het subdomein *Verhoudingen* helemaal uit. Het voorbeeld is ontleend aan een geruchtmakend onderzoek uit 2006, waaruit bleek dat meer dan de helft van de instromende studenten van de pabo's slechter op papier of uit het hoofd kan rekenen dan de beste 20% van de leerlingen in groep 8 van de basisschool. De volgende twee opgaven mochten op papier worden berekend, maar de rekenmachine was niet toegestaan.

Opgave 1. Bereken 0,2 × 1,5.
Opgave 2. Een auto van 22.000 euro wordt 20% goedkoper. De nieuwe prijs wordt daarna nog eens met 10% verlaagd. Wat is het percentage van de totale prijsverlaging?

Opgave 1 doet in onze classificatie een beroep op beheersing van het type *paraat hebben,* en wel op referentieniveau 1, streefkwaliteit 1S. Die classificatie (1S en *paraat hebben*) houdt in dat aan het einde van het primair onderwijs het tot het repertoire van leerlingen op referentieniveau 1S moet behoren dat zij *weten* hoe twee eenvoudige getallen in decimale schrijfwijze (in de wandeling kommagetallen genoemd) kunnen worden vermenigvuldigd. Hoewel meer gecompliceerde vermenigvuldigingen van kommagetallen in het voortgezet onderwijs al snel met de rekenmachine worden uitgevoerd blijft deze basis aan parate kennis (de plaats van de komma in het antwoord) ook van belang om de orde van grootte van het te produceren antwoord te kunnen schatten. (Zo iets als 2 keer anderhalf is 3, dus 0,2 keer anderhalf is 0,3.)

De instroom van de pabo in het 2006-onderzoek behaalde een 80% goed score op deze opgave 1.

Voor het gewenste beheersingsniveau van *paraat hebben* is deze score van de aankomende studenten die voor een deel in jaren niet hebben gerekend nog niet zo slecht.

Door ook te vragen het antwoord met een duidelijke *argumentatie* toe te lichten kan deze opgave 1 eenvoudig naar een hoger kwaliteitsniveau worden getild, beter passend voor het derde referentieniveau 3S, eind havo A of instroom pabo. Onmiddellijk wordt dan de kennis van het type *weten waarom* getoetst, een niveauverhoging die een verschuiving inhoudt van het kunnen reproduceren van een formele rekenregel (*paraat hebben*) naar het kunnen uitleggen van het waarom van die formele rekenregel. Een kwaliteit die natuurlijk onmisbaar is voor leraren basisonderwijs.

Het zit kennelijk redelijk goed met de *noodzakelijke voorwaarde* dat deze studenten over de parate kennis moeten beschikken die zij gaan gebruiken of toepassen in een situatie. Dat *gebruiken* of *toepassen* in een situatie (*functioneel gebruiken*) is de eigenlijke toetssteen of leerlingen beschikken over de noodzakelijke basis aan kennis, inzicht en vaardigheden om in de maatschappij of het beroep te kunnen functioneren. Zo'n situatie wordt in de tweede opgave gepresenteerd.

De instroom van de pabo in het 2006-onderzoek behaalde een 20% goed score op deze opgave 2.

Volgens de onderzoekers zou opgave 2 de rekenkwaliteit toetsen van de beste 20% van groep 8, het is volgens hen een P80-opgave. Dat is een veel exclusievere groep dan die waarvoor de *streefkwaliteit* van het *eerste referentieniveau* 1S is bedoeld. De door ons gekozen voorbeeldopgaven die niveau 1S karakteriseren worden op dit moment door 50% van de leerlingenpopulatie in groep 8 goed gemaakt, het zijn P50 opgaven. De ambitie is dat in de komende jaren 65% van de leerlingen dat type opgaven goed gaat maken, een stevige kwaliteitsimpuls. Zie hoofdstuk 4. De top 20% is een veel exclusievere deelgroep van de gehele populatie, ongeveer even groot als de uitstroom naar het vwo uit het po. (Ongeveer 65% stroomt uit naar vmbo-t of havo-vwo.)

Waar plaatsen we deze opgave in de door ons gedefinieerde kwaliteiten? In PPON-2004 kon de top 10% van de leerlingen een soortgelijke opgave matig maken, dat wil zeggen: de kans dat een leerling uit de top 10% deze opgave goed maakt ligt tussen 0,5 en 0,8. Die opgave is dus geen goed voorbeeld van wat leerlingen op het referentieniveau 1S moeten kunnen. We gaan daarom de opgave vereenvoudigen.

Opgave 2A. Een auto van 22.000 euro wordt 20% goedkoper. Wat kost die nu?

Opgaven van dit type worden in PPON-2004 door de gemiddelde leerling (de percentiel-50 leerling) *matig* gemaakt. Voor referentieniveau 1S zijn wij van mening dat leerlingen deze opgave *goed* moeten kunnen maken. Tot het repertoire aan *paraat hebben* van de leerlingen behoort dan het met de hand kunnen berekenen van 20% van een mooi geheel groot getal, de situatieve kennis dat die berekende 20% van het bedrag van 22.000 moet worden afgetrokken (*functioneel gebruiken*) en ook nog het snel en foutloos kunnen uitvoeren van de berekening 22.000 - 4.400 = 17.600. De ambitie voor 1S is dat de percentiel-65 leerlingen deze opgave 2A *vlot en goed* moet kunnen maken, dat is heel wat beter dan nu het geval is.

Analoge opgaven in PPON-2004, maar dan in eenvoudiger situaties en kleinere getallen worden door de percentiel-25 leerlingen matig beheerst. "Bijvoorbeeld een zeiltochtje kost 42,50 euro en Mieke krijgt 10% korting. Wat moet ze betalen?" Kiezen we voor de ondergrens van het basisniveau 1F deze opgave als norm dan weten we dat 25% van de leerlingen in PPON2004 niet op het referentieniveau van de basiskwaliteit 1F zit. De ambitie is dan dat een hoger percentage deze opgave goed kan maken. Zie verder de hoofdstukken 6 en 8.

Terug naar de oorspronkelijke opgave 2. Waar bestaat de moeilijkheid uit? We rekenen even door, nu 10% nemen van 17.600, dat er weer van aftrekken, dat geeft 15.840. Het vraagt al wat meer vaardigheid in het foutloos uitvoeren van een aftrekking met pen en papier (zie hoofdstuk 7 *Getallen*), maar wellicht nog wel de streefkwaliteit 1S van het eerste referentieniveau. Tweemaal dezelfde berekening uitvoeren.
Nu wordt het echt lastig. De vraag uit opgave 2 moet nu getransformeerd worden naar ons berekende antwoord. Wat wordt er nu bedoeld? Hoe kom ik van 15.840 naar het antwoord op de vraag naar het percentage van de totale prijsverlaging? Die denkstap zal voor leerlingen van kwaliteit 1S, de streefkwaliteit op het eerste referentieniveau, na de voorgaande rekenpartij allicht te complex worden. (In PPON komen deze complexe samengestelde berekeningen van het type *functioneel gebruiken* niet voor.) De totale prijsverlaging is 6.160 euro, 1% van 22.000 is 220, dus 6.160 : 220 = 28 of 28%. De uiteindelijke prijsverlaging is 28% en niet het alternatief 30% dat door het merendeel van de of aftrekken. Wat moet er vervolgens gebeuren? Je kunt je ook *herinneren* (*paraat hebben*) dat het vaak een goede *heuristiek* (een vaak succesvolle zoekmethode om je denken op gang te helpen) is om de gegeven probleemsituatie gewoon te vereenvoudigen

'Als je rekenen wilt onderhouden dan is er een extra uur nodig'

door een simpel getallenvoorbeeld te nemen. In dit voorbeeld leidt dat zelfs meteen tot de oplossing. Neem 100 euro, 20% eraf geeft 80 euro, daar weer 10% af geeft 72 euro, dat is 72% van het beginbedrag, dus 28% korting. Het kunnen toepassen van een succesvolle strategie is een aspect van het *functioneel gebruiken*, waarbij dergelijke strategieën ook behoren tot het gewenste kennisbestand. Zo onderwezen en berekend mag je wellicht verwachten dat leerlingen na wat meer ervaring met procentuele veranderingen op de basiskwaliteit van het tweede referentieniveau 2F een goede oplossing kunnen vinden.

Inzicht en overzicht

Wat je vanaf de streefkwaliteit van het tweede referentieniveau 2S mag verwachten is dat leerlingen uit die doelgroep hebben *begrepen* en *gememoriseerd* dat het bij procentuele toename of afname (dus exponentiële groei) altijd gaat om het rekenen met een *vermenigvuldigingsfactor*. Het beginbedrag wordt met 0,8 × 0,9=0,72 vermenigvuldigd, dus het kortingspercentage is 28%. De laatste aanpak, namelijk het zoeken van de vermenigvuldigingsfactor, is breed toepasbaar op allerlei situaties waarin exponentiele toename of afname een rol speelt. Kenmerkend voor *weten waarom*.
Die vermenigvudigingsfactor of groeifactor speelt natuurlijk ook een rol bij vergroten en verkleinen, bij berekeningen met schaal en is een kernconcept zowel in het subdomein *Verhoudingen* als in het subdomein *Verbanden*.

Het gaat dan uiteindelijk om de component *weten waarom*, bijvoorbeeld om:

1. *Contexten met procentuele groei, aangepakt met de vermenigvuldigingsfactor: bij 25% toename hoort de groeifactor 1,25. Zie samengestelde rente.*
2. *Het kenmerk van exponentiële groei wordt in woorden samengevat: de groeifactor bij tijdseenheid is steeds dezelfde.*
3. *In tabellen die het verband tussen twee grootheden beschrijven wordt onderzocht of er sprake is van exponentiële groei.*
4. *De exponentiële formule met beginhoeveelheid en groeifactor wordt opgesteld en geïnterpreteerd.*

2.3 Consolideren

De feiten, begrippen, operaties, routines en methoden, al de te verwerven kennis, inzichten en vaardigheden, vormen in rekenen & wiskunde een hiërarchisch bouwwerk, waarbij de verschillende bouwstenen op elkaar rusten. Vallen er stenen tussenuit dan wordt het bouwwerk wankel en stort het uiteindelijk in. Op dat moment lijkt het alsof leerlingen in jaren van onderwijs niets hebben geleerd. Iedere docent in rekenen & wiskunde kent dat verschijnsel en ook veel klachten van vervolgonderwijs zijn hierop terug te voeren. Leerlingen die het basale rekenen uit groep 6 po nog niet goed genoeg beheersen, krijgen wel steeds weer nieuwe begrippen en rekenoperaties onderwezen, totdat aan het eind van groep 8 blijkt dat ze daar niets meer van hebben opgestoken. Leerlingen die nog niet de kern van het rekenen met procenten begrijpen, krijgen steeds complexere situaties met procenten voorgelegd en grijpen wanhopig naar de laatste rekentruc om toch maar een antwoord te produceren. Leerlingen, die nog niet goed benaderend kunnen rekenen (b.v. schatten van de orde van grootte van de uitkomst), zien geen kans om het door de rekenmachine geproduceerde antwoord op correctheid te beoordelen. Onvoldoende begrip of tekortschietende oefening van rekenprocedures of rekenstrategieën leiden ertoe dat leerlingen bij later gebruik ogenschijnlijk willekeurig een keuze maken uit het niet volledig beheerste repertoire aan rekenregels.

Naar onze vaste overtuiging moet in het onderwijs veel meer werk worden gemaakt van het *consolideren*, het opvoeren van de beheersing tot het *paraat hebben*, over de noodzakelijke *parate kennis* van de bouwstenen waarvan in het vervolg van de opbouw van het inhoudelijke netwerk van feiten, begrippen en procedures wordt uitgegaan. Het gaat over *geautomatiseerde* rekenoperaties, over het *herkennen* van feiten en begrippen, over *routines*, te *gebruiken* in een ruime variatie aan situaties. In feite gaat het dus over het beheersingsniveau van de te verwerven basis aan kennis en vaardigheden. Op een bepaald moment in het leertraject van een leerling moet die basis paraat beschikbaar zijn, omdat anders het voortbouwen weinig zin heeft. Wij constateren dat op allerlei momenten in de leerlijnen rekenen & wiskunde *volstrekt onvoldoende* wordt duidelijk gemaakt, welke basis aan kennis en vaardigheden zo essentieel is dat het bijbehorende beheersingsniveau moet worden opgevoerd tot *paraat hebben.*

Wereldwijd is in het reken- en wiskundeonderwijs al decennia lang een discussie aan de gang over de relatie tussen vaardigheden en inzicht, tussen routines en begrippen, tussen eigen constructies en informele rekenoperaties versus in te oefenen algoritmen. Ook binnen de Expertgroep is die discussie gevoerd. Al heel snel gaat het dan ook over het *Hoe?* van het verwerven van vaardigheden en daar laten wij ons in dit advies over te bereiken doelen in rekenen en wiskunde niet over uit.
De volgende overwegingen uit Adding It Up, een publicatie van de National Research Council van de USA geschreven door topwetenschappers uit de wetenschappelijke disciplines wiskunde, psychologie, wiskundedidactiek en onderwijskunde, achten wij relevant voor de genoemde discussie.

1. *Ten onrechte wordt vaardigheid soms tegenover inzicht geplaatst. Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker beheersingsniveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen.*
2. *Zonder een goede routine stranden leerlingen bij het verdiepen van wiskundige ideeën of het oplossen van wiskundige problemen. De aandacht die zij dan nodig hebben om hun resultaten uit te werken in plaats van die paraat op te roepen gaat ten koste van de aandacht voor de aanpak van het probleem of het zoeken naar onderliggende relaties.*
3. *Leerlingen die een vaardigheid zonder begrip leren hebben heel veel oefening nodig om de stappen niet te vergeten. Als leerlingen de operaties begrijpen, dan zijn ze beter in staat om ze te*

reconstrueren en in samenhang met andere operaties te zien.
4. *Als vaardigheden zonder begrip worden geleerd, dan blijven het geïsoleerde brokjes kennis. Nieuwe begrippen of vaardigheden kunnen dan niet voortbouwen op een bestaand netwerk aan kennis. Dat leidt ertoe dat leerlingen voor elke kleine variatie in opgaven weer nieuwe oplossingsprocedures moeten leren.*

Zo komen wij tot onze vijfde aanbeveling, die wij *essentieel* achten voor het slagen van het streven tot niveauverhoging.

> *Aanbeveling 5 Paraat hebben*
> *Een duidelijk te benoemen fundament aan begrippen, rekenfeiten, automatismen, routines, moet worden geconsolideerd en verankerd. In de praktijk van het onderwijs moet meer expliciet werk worden gemaakt van het systematisch consolideren en oefenen totdat het gewenste beheersingsniveau van paraat hebben is bereikt.*

2.4 Gebruiken

Het kunnen gebruiken van een basis aan kennis en vaardigheden van rekenen & wiskunde in verschillende situaties buiten dat vakgebied is een essentiële doelstelling van de algemene vorming en de belangrijkste component van de te verwerven competentie in rekenen & wiskunde voor alle vormen van onderwijs. Die noodzakelijke basis varieert in breedte, diepgang en abstractie voor vmbo, havo-vwo, type beroepsonderwijs en per sector. De term ‘ *gebruiken*’ is verwant met het begrip ‘*horizontaal mathematiseren*’ . Dan gaat het erom dat een situatie van buiten de wiskunde in wiskundige termen wordt vertaald. Denk bijvoorbeeld aan het opstellen van een formule voor samengestelde rente of de remweg van een auto als functie van de snelheid.
Met het oog op het leren *gebruiken* van begrippen en rekenoperaties wordt in het primair onderwijs dat fundament mede gekoppeld aan eenvoudige situaties, waarin rekenen & wiskunde kan helpen die situaties te structureren, te verduidelijken of gerezen vragen te beantwoorden. In het vmbo staat het gebruiken van kennis en vaardigheden in een breed scala aan situaties centraal, opdat leerlingen met die kennis ook sectorspecifieke problemen kunnen oplossen en worden voorbereid op een later beroepsspecifiek gebruik van rekenen & wiskunde. Die centrale positie van het gebruiken van rekenen & wiskunde wordt doorgetrokken naar het mbo, waar naast een algemene basis (als burger van Nederland) in de verschillende sectoren een toespitsing plaatsvindt op de meer beroepsspecifieke kennis en de kennis en vaardigheden die voor het doorstromen naar een vervolgopleiding belangrijk worden.

Basisvaardigheden die niet worden onderhouden en benut in andere vakgebieden, zakken weg en worden ook niet meer als basisvaardigheden herkend. En als er wel wordt gerekend, dan gebeurt dat veelal zonder inzet van de beproefde methoden en rekenmodellen waar de leerlingen in het reken- en wiskundeonderwijs mee hebben leren werken (b.v. de verhoudingstabel). Hier ligt ongetwijfeld een oorzaak van het breed geconstateerde gemis aan een aantal basisvaardigheden rekenen & wiskunde in de hogere leerjaren vo en het mbo, hbo en wo. Binnen de scholen van het vo kan hier al veel aan worden gedaan. Tijdens de veldraadpleging van de Expertgroep op 21 november 2007 was de overgrote meerderheid van de aanwezigen van mening dat van de versterking van die samenhang tussen de basisvakken enerzijds en de toepassing van die kennis en vaardigheid in andere vakken anderzijds op schoolniveau veel meer werk moet worden gemaakt.

> *Aanbeveling 6 Gebruiken in andere leergebieden*
> *Het gebruiken en onderhouden van basisvaardigheden op het gebied van het rekenen & wiskunde moet voor een belangrijk deel plaats vinden tijdens het toepassen in andere leergebieden en praktijksituaties. De aanpak die in rekenen & wiskunde is aangeleerd moet bij de docenten van andere vakken bekend zijn en zoveel mogelijk worden gebruikt.*

2.5 Verdiepen

Bij het *gebruiken* van rekenen & wiskunde verschillen leerlingen en volwassenen sterk in de mate waarin zij het abstraheren, formeel manipuleren, redeneren en generaliseren binnen het domein van rekenen & wiskunde gaan beheersen. In de bovenbouw van het primair onderwijs tekenen zich al snel groepen leerlingen af die aan een enkel voorbeeld genoeg hebben om de onderliggende abstractie of regel of generalisatie te vatten. Leerlingen die aan een enkel voorbeeld het gemeenschappelijke in rekensituaties herkennen en die op grond van hun overzicht, hun inzicht, hun interpreteren van de betekenis, kunnen uitleggen waarom iets werkt of waar is of correct is. In potentie zijn dat kwaliteiten van leerlingen die het waard zijn om te worden gestimuleerd en ontwikkeld. De gangbare praktijk is dat die leerlingen pas op de plaats moeten maken voor de modale leerlingen die meer voorbeelden, oefeningen en verwerkingstijd nodig hebben. Dat geldt zeker voor het primair onderwijs, maar ook in de onderbouw van het voortgezet onderwijs wordt in de schaarse rekenlijnen zelden materiaal aangeboden dat dieper graaft als aanvulling op een horizontale verbreding.
Wij pleiten er daarom voor om in het onderwijsaanbod in de bovenbouw van het basisonderwijs en de onderbouw van havo-vwo deze groep leerlingen de kans te geven zich te *verdiepen*.
De term ‘*verdiepen*’ is verwant met het begrip *‘verticaal mathematiseren’*. Dan gaat het erom dat wiskundige verschijnselen met wiskundige middelen van hoger niveau worden geordend of georganiseerd. Denk bijvoorbeeld aan het bestuderen van bijvoorbeeld de structuur van het getalsysteem of van de ligging van priemgetallen of van Egyptische breuken of van het voortzetten van meetkundige of getallen patronen, enzovoort.

> *Aanbeveling 7 Verdiepen*
> *Rekening houden met verschillen houdt voor rekenen & wiskunde ook in dat de leerlingen die beter kunnen abstraheren, formeel manipuleren en generaliseren dan de modale leerlingen in hun onderwijsgroep door het verdiepen worden uitgedaagd om in de beschikbare tijd hun plafond te benaderen.*

‘Het aanleren van de vaardigheden
is niet het probleem,
het onderhoud dat is het probleem’

3 Onderhouden

Een eenmaal verworven basis aan kennis en vaardigheden moet natuurlijk worden onderhouden om actueel beschikbaar te blijven voor functioneel gebruik of voor een verdere verbreding of verdieping van een conceptueel netwerk. Kijken we naar de leerlijnen rekenen & wiskunde zoals die in het primair onderwijs zijn gefundeerd, dan valt op dat er voor veel leerlingen in het voortgezet onderwijs en het mbo nu geen sprake is van een doorlopende leerlijn rekenen. Achtereenvolgens bekijken we die leerlijn rekenen voor de verschillende schooltypen.

3.1 havo-vwo

In het schoolvak wiskunde wordt in de schoolboeken voor havo-vwo weinig gerekend en is er in het bijzonder voor *Getallen* geen sprake van een systematisch onderhoud en een voortbouwen op het bereikte niveau van groep 8. Zo wordt het *rekenen* met breuken in het basisonderwijs op dit moment niet echt beoefend, terwijl in de methoden voor havo-vwo niet sprake is van een systematische opbouw en van *consolideren* tot het niveau van *paraat hebben*. Kennelijk gaan veel wiskundeleraren en de schoolboeken er voor havo-vwo nog steeds van uit dat die rekenlijnen met succes in groep 8 zijn afgerond en voldoende zijn (en blijven) geconsolideerd. Ook is er over en weer geen wisselwerking tussen gebruikte didactische modellen bij het rekenen (bijvoorbeed het rechthoekmodel voor het vermenigvuldigen) en het benutten van zo'n model, bijvoorbeeld in de algebra. Kijken we evenwel naar andere deelgebieden van rekenen & wiskunde, zoals de informatieverwerking, het gebruik van grafieken, meten en meetkunde dan gaan de schoolboeken van het voortgezet onderwijs er impliciet van uit dat de leerlingen daar in het primair onderwijs nooit iets van hebben geleerd.

Aanbeveling 8 Onderhouden in onderbouw havo-vwo
Bij de overgang van het basisonderwijs naar havo-vwo sluiten van beide kanten de leerlijnen rekenen & wiskunde niet goed aan. In de onderbouw havo-vwo wordt niet meer systematisch gewerkt aan het onderhouden en uitbreiden van de verworven kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen. Op basis van de referentieniveaus moeten in nationaal en regionaal overleg tussen scholen voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs die leerlijnen worden geharmoniseerd.

3.2 mbo

In de onderbouw van het vmbo zet de rekenlijn zich redelijk goed door en wordt een zeker fundament aan kennis en vaardigheden verstevigd en functioneel toegepast in allerlei dagelijks voorkomende situaties. Voor basisberoeps, kaderberoeps, gemengde leerweg en theoretische leerweg is die rekenlijn doorgetrokken tot op het eindexamen vmbo. Een aandachtspunt is wel dat in elk van de genoemde vmbo-richtingen ongeveer 80% van de leerlingen wiskunde, met daarin een flink subdomein rekenen, als examenvak heeft gekozen, wat inhoudt dat voor 20% van de vmbo-leerlingen de leerlijn rekenen na het tweede leerjaar wordt afgebroken. Het lijdt geen twijfel dat ook die leerlingen gebaat zouden zijn bij een soortgelijk pakket aan rekenen & wiskunde als de leerlingen die wel tot en met het centraal examen het onderwijs in rekenen & wiskunde volgen. Op dit moment bereikt die 20% van het vmbo het algemeen maatschappelijk niveau voor rekenen & wiskunde, het referentieniveau 2F, in het vmbo niet. Het referentieniveau 2F valt in onze beschrijving globaal samen met de rekendomeinen van het examenprogramma wiskunde van vmbo kb en is bereikbaar voor het overgrote deel van de leerlingen in het vmbo. Internationaal is het regel dat leerlingen tot en met hun zestiende levensjaar onderwijs in rekenen & wiskunde volgen. Hoewel de leerlingen zonder wiskunde in het examenpakket alsnog in het mbo dat gewenste referentieniveau zouden kunnen behalen, ligt het voor de hand dat alle leerlingen in het vmbo dat referentieniveau 2F bereiken.

Aanbeveling 9 Rekenen & wiskunde voor alle leerlingen in het vmbo Alle leerlingen moeten minimaal het basale referentieniveau 2F (burgerschapsniveau) bereiken, wat kan worden gerealiseerd door ze minimaal het rekendomein uit het vmbo examenprogramma wiskunde kb te laten volgen.

3.3 mbo

In het mbo wordt meestal niet systematisch het niveau van rekenen & wiskunde onderhouden of uitgebreid. De discussie moet gaan over de vraag of en zo ja welke kennis en vaardigheden op het gebied van rekenen & wiskunde voor de verschillende doelgroepen in het mbo wenselijk of noodzakelijk zijn. Die discussie wordt in de eerste plaats in het mbo zelf gevoerd en heeft geleid tot het opstellen van het '*Raamwerk rekenen-wiskunde*', dat eind 2007 zal worden gepubliceerd. In het regelmatig overleg met de opstellers van dat raamwerk zijn de verschillende niveaus op elkaar afgestemd, zodat er sprake is van een harmonieus geheel. (Uniek in ons door sectoren versnipperd onderwijsveld!)
Op dit moment is de werkelijkheid dat leerlingen in vier jaar mbo nauwelijks rekenen en soms daarna bij een vervolgopleiding ineens weer een basis aan rekenen & wiskunde nodig hebben. Bekend is natuurlijk de route van leerlingen die via de opleiding tot onderwijsassistent of een opleiding in de zorgsector zich aanmelden bij de pabo en intussen vier tot zes jaar niet hebben gerekend.
In onze keuze voor de referentieniveaus verlaten leerlingen het vmbo met minimaal basiskwaliteit 2F en stromen daarmee binnen in het mbo. Minimaal wordt vervolgens in het mbo in de toekomst die basiskwaliteit 2F onderhouden in relevante situaties of uitgebreid tot de basiskwaliteit 3F. Het repertoire aan rekenen & wiskunde dat studenten of afgestudeerden van het mbo in praktijksituaties of beroepssituaties nodig hebben, kan dan voortbouwen op een solide kennisbasis 2F of 3F.

Aanbeveling 10 Herstel leerlijnen in het mbo
Overeenkomstig de voorstellen in het 'Raamwerk rekenen-wiskunde mbo' en de door ons beschreven referentieniveaus 2F en 3F moet op korte termijn begonnen worden met het herstel van de ongewenst afgebroken of onderbroken leerlijnen in het mbo.

3.4 Instroom hbo

Een aanleiding tot zorg over de leerlijnen taal en rekenen is de kwaliteit van de kennis en vaardigheden op deze gebieden van instromende studenten in hbo en wo. Toegespitst op rekenen & wiskunde, zoals door ons beschreven gaat het dan om het instroomniveau voor het hbo en in het bijzonder voor de pabo. Het instroomniveau hbo-wo voor de wiskunde laten we in ons rapport buiten beschouwing, daar is door de minister de commissie Toekomst Wiskundeonderwijs cTWO voor ingesteld. Onze speciale zorg voor de pabo en de vakinhoudelijke kennis en vaardigheden van de instromende pabo-studenten hangt nauw samen met onze zorg voor de kwaliteit van de leraren in het basisonderwijs. Het valt niet te ontkennen dat de concentratie op de basisvakken taal en rekenen in het primair onderwijs is afgenomen wegens de vele andere, vaak ook relevante, doe- en leeractiviteiten. Ook de didactische aanpak is gewijzigd, evenals de samenstelling en kwaliteiten van het lerarencorps. Twee recent verschenen dissertaties (Hoogeveen 1999[i] en Geerdink 2006[i]) suggereren dat de aandacht van beginnende en zittende leraren in het basisonderwijs niet (meer) ligt bij de verwerving van de basis aan kennis, inzicht en vaardigheden, waar de Expertgroep naar kijkt. Een door ons gewenst effect van het vaststellen van referentieniveaus voor de uitstroom van het basisonderwijs kan zijn dat de grotere duidelijkheid over de gewenste opbrengst de focus op de te onderwijzen basiskennis zal versterken.
Een ernstige complicatie in het bereiken van een gewenst niveau van vakinhoudelijke kennis en vaardigheden van beginnende leraren basisonderwijs is wel dat de instroom in de pabo voor ongeveer de helft bestaat uit mbo-afgestudeerden die jarenlang niet meer hebben gerekend, laat staan onderwijs in rekenen & wiskunde hebben gehad. Door de recente stelselwijziging in de bovenbouw havo (wiskunde niet meer verplicht) komt daar nu nog een instroom uit de havo bij die voor een belangrijk deel ook twee jaar lang hun kennis en vaardigheden op het gebied van rekenen & wiskunde niet hebben onderhouden. Het is natuurlijk absurd om te denken dat het vervolgens, na vlijtig oefenen, slagen voor een rekentoetsje in het eerste jaar van de pabo de garantie is voor een adequate vakinhoudelijke kennis van het rekenen. Zolang deze ongewenste instroomsituatie voortduurt zal tijdens de pabo veel aandacht aan de vakinhoudelijke kennis moeten worden besteed.
De Expertgroep gaat over het beschrijven van een wenselijke situatie, die er volgens ons als volgt moet uitzien. Conform onze voorstellen wordt er een algemeen maatschappelijk niveau 2F geformuleerd, dat alle leerlingen op het einde van het vmbo hebben bereikt en dat minimaal in het mbo wordt onderhouden. Voor leerlingen die willen doorstromen naar een hbo-opleiding is uitbreiding van dat reportoire aan kennis en vaardigheden gewenst, tot op de basiskwaliteit 3F. Voor veel vervolgopleidingen in het hbo beschikken de instromende studenten dan over een voldoende basis aan een algemeen maatschappelijke kennis en vaardigheden op het gebied van rekenen & wiskunde. In het bijzonder in de technische sector zullen aanvullende, sectorspecifieke en beroepsspecifieke eisen nodig zijn. Hetzelfde geldt bijvoorbeeld voor de opleiding tot verpleegkundige, waar het medische rekenen een beroepsspecieke toespitsing is op de beheersing van met name het subdomein *Verhoudingen*. Deze wenselijke situatie is helemaal in lijn met de voorstellen in het "Raamwerk rekenen-wiskunde mbo".

Aanbeveling 11 Uitstroomniveau mbo en instroomniveau hbo In lijn met de voorstellen in het 'Raamwerk rekenen-wiskunde mbo' verdient het aanbeveling om alle mbo-leerlingen minimaal het referentieniveau 2F te laten bereiken en onderhouden. Het uitbreiden van referentieniveau 2F naar 3F geeft een voldoende kennisbasis voor de instroom in het grootste deel van het hbo.

Voor de instroom van de pabo ligt de gewenste kwaliteit anders, omdat hier de noodzakelijke beroepsspecifieke kennis het gehele gebied van rekenen & wiskunde in het basisonderwijs betreft. De noodzakelijke vakinhoudelijke competentie maakt hier een zwaartepunt bij het *weten waarom* noodzakelijk. Dat wil zeggen dat het vanzelfsprekend tot de vakinhoudelijke competentie van een leraar basisonderwijs behoort om *overzicht* te hebben over de structuur van de getallen en de verschillende rekenoperaties en dat hij niet alleen zelf *inzicht* heeft in de concepten en methoden, maar die ook kan *verklaren*, *uitleggen*, *beredeneren*, in een *groter geheel* plaatsen, enzovoort. Het referentieniveau 3S is daarvoor bedoeld.
Op dit moment komt dat het meest overeen met het rekendomein van het voorgestelde nieuwe programma wiskunde A havo. In nader overleg met cTWO en de pabo-sector kan dat rekendomein nog beter worden afgestemd op deze doelgroep en referentieniveau 3S.
Voor de bovenbouw havo geldt dat na de laatste stelselwijziging naar schatting een 20% van de havo-populatie, namelijk de leerlingen die voorheen wiskunde A1 volgden, nu geen wiskunde meer als examenvak kiest. Een belangrijk deel van die 20% stroomt wel door naar de pabo met een breuk in de rekenlijn van twee jaar. Binnen de ruimte van de nieuwe havo-profielen is het mogelijk om een deel van een vak, hier bedoeld het rekendomein van wiskunde A, in de vrije ruimte te kiezen. Een analoog domein kan in het mbo optioneel worden aangeboden voor studenten die met een stevige vakinhoudelijke basis aan rekenen willen instromen in de pabo. Het is aan te bevelen om een projectteam uit pabo, mbo en havo een module voortgezet rekenen te laten ontwikkelen voor het referentieniveau 3S. De doelgroep zijn de leerlingen van havo en mbo die met dat gewenste referentieniveau 3S willen instromen in de pabo, bijvoorbeeld de helft van de onderwijsassistenten die nu de pabo instroomt.

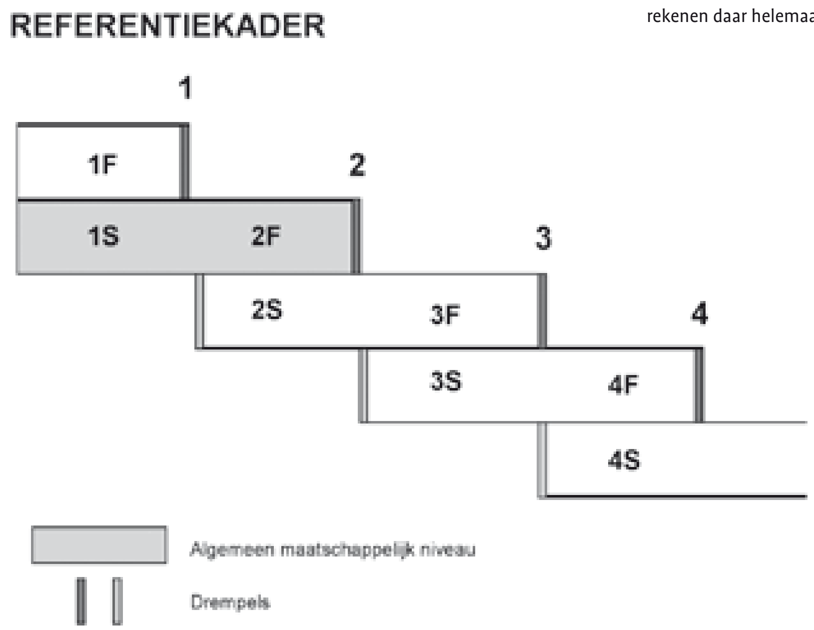
Aanbeveling 12 Instroom pabo
Voor instroom in de pabo is het wenselijk een module voortgezet rekenen in mbo en havo te doen ontwikkelen, die opleidt tot een referentienievau 3S dat beginnende pabostudenten een stevige vakinhoudelijke basis verschaft.

'Eigenlijk zijn taal en rekenen de enige vakken die zo'n aparte aanpak verdienen omdat dit ook de basis is voor andere vakken'

4 Referentieniveaus en kwaliteiten

4.1 De gekozen referentieniveaus

De gekozen referentieniveaus zijn beschreven in vier subdomeinen, samenhangende netwerken van rekenfeiten, begrippen en rekenoperaties. De indeling in vier subdomeinen, namelijk *Getallen*, *Verhoudingen*, *Meten en Meetkunde* en *Verbanden*, volgt in grote lijnen de indelingen in het basisonderwijs (zie PPON) en het voortgezet onderwijs. Deze referentieniveaus zijn beschrijvingen van gewenste opbrengsten van onderwijs in termen van *kennen en kunnen* van leerlingen, met het al aangegeven onderscheid tussen typen kennis en vaardigheden met bijpassende beheersingsniveaus.



De referentieniveaus zijn beschreven voor de leeftijden van 12, 16 en omstreeks 18 jaar. Op elk van de drie referentiemomenten zijn twee verschillende kwaliteiten beschreven, een basiskwaliteit of fundamentele kwaliteit en een streefkwaliteit. Vanaf groep 8 in het basisonderwijs (12 jaar) zijn globaal gesproken twee verschillende sporen te onderscheiden, namelijk het spoor waarin de nadruk ligt op het *functioneel gebruiken* van de kennis en vaardigheden en het spoor waarin meer de nadruk valt op het *formeel opereren* met getallen, grootheden en ruimtelijke vormen. In het hoofdrapport van de Expertgroep is het volgende algemene referentiekader opgenomen.

Voor rekenen & wiskunde zijn de niveaus 4F en 4S niet ingevuld, omdat het rekenen daar helemaal in meer geavanceerde wiskunde is opgegaan.

4.2 Referentieniveaus 1F en 1S

Leerlingen die in het basisonderwijs het referentieniveau 1F bereiken, kunnen in vmbo bb en kb doorgroeien naar het burgerschapsniveau 2F. Referentieniveau 1S omvat 1F en is het streefniveau waar de grote groep van leerlingen aan moet voldoen om een goede aansluiting te krijgen op vmbo-t of havo-vwo.
De beschrijvingen van de referentieniveaus zijn op inhoudelijke overwegingen geformuleerd en worden exemplarisch toegelicht met opgaven die goed gemaakt moeten worden. De meeste voorbeeldopgaven bij de twee referentieniveaus 1F en 1S zijn ontleend aan het meest recente PPON-onderzoek. Dat maakt het mogelijk om tegelijk de haalbaarheid van de voorbeeldopgaven te beoordelen en de ambitie tot niveauverhoging vast te leggen. De geselecteerde voorbeeldopgaven van het referentieniveau 1F worden op dit moment door 25% van de leerlingen niet goed gemaakt, zodat hier de ambitie is om zoveel mogelijk van die 25% naar het minimale basisniveau te krijgen. Voor de leerlingen waar dit (op onderdelen) te hoog voor gegrepen is zijn extra inspanningen vereist in de zin van tijd, aandacht en remediërende materialen. Leerlingen voor wie 1F het optimum is, zullen veelal instromen in vmbo bb en kb, nu 35% van de totale reguliere leerlingenpopulatie in groep 8.
De streefkwaliteit 1S is bedoeld voor leerlingen in groep 8 met rekenpotentie voor vmbo theoretisch en havo-vwo, terwijl de geselecteerde voorbeeldopgaven op dit moment door 50% van de leerlingen niet goed worden gemaakt. Omdat op dit moment een 65% van de leerlingenpopulatie doorstroomt naar vmbo-t of havo-vwo, is hier de ambitie om nog eens 15% van de leerlingenpopulatie op het niveau van het referentieniveau 1S te laten presteren. Zoals al in *Aanbeveling 7* is geformuleerd en in hoofdstuk 2 is toegelicht ligt de beschreven streefkwaliteit voor een deel van de leerlingen (naar schatting 20%) structureel beneden hun potentiële mogelijkheden. Voor hen dient in de bovenbouw van het basisonderwijs een afzonderlijk onderwijsaanbod te worden gerealiseerd, zonder dat vast te leggen in een bepaald niveau. Zie bijvoorbeeld de voorstellen van Buys, die een meer structurele differentiatie in het onderwijsaanbod voor het *verdiepen* uitwerkt.

Een schatting, gebaseerd op PPON en LVS (LeerlingVolgsSysteem), is dat 10% van de populatie in het basisonderwijs ook na de voorgestelde extra inspanning dat basale niveau 1F niet zal halen. Zoals al eerder is beargumenteerd leren deze leerlingen vanaf groep 6 te weinig, omdat zij de basale begrippen en vaardigheden uit de voorgaande jaren nog niet beheersen, terwijl het onderwijsaanbod daar wel op voortbouwt. Wij bevelen aan om voor deze groep in het basisonderwijs een afzonderlijk leertraject te ontwikkelen. Zie Noteboom e.a.

Aanbeveling 13 Niet halen van de basiskwaliteit 1F
De ambitie van de Expertgroep is dat meer leerlingen de basiskwaliteit 1F zullen behalen dan nu het geval is. Voor de groep leerlingen die vanaf groep 6 in de ontwikkeling van hun rekenvaardigheid stagneert, moet een afzonderlijk leertraject worden ontwikkeld.

4.3 Algemeen maatschappelijk niveau 2F en 3F

Niveau 2F is het algemeen maatschappelijk niveau en is gedefinieerd op het niveau van het rekendomein van het examenprogramma wiskunde voor vmbo bb en kb. In het mbo moet dit niveau 2F worden onderhouden om het burgerschapsniveau te handhaven of het wordt verbreed naar referentieniveau 3F in het gebruik bij andere vakken, bij praktijksituaties of in de verwerving van beroepscompetenties. Die keuze loopt parallel aan de meer gedetailleerde niveaus uit het tegelijkertijd ontwikkelde “Raamwerk rekenen-wiskunde mbo” en is toegelicht in hoofdstuk 3.

Voor de invulling van de referentieniveaus heeft de Expertgroep zich geconformeerd aan de bestaande kerndoelenbeschrijvingen en examenprogramma’s. De structuur van de subdomeinen rekenen is het uitgangspunt en het *functioneel gebruiken* benadrukt dat de verworven kennis en vaardigheden in praktische situaties moet kunnen worden gebruikt. De operationalisering vindt vervolgens plaats met behulp van pen-en-papier opgaven uit die bestaande programma’s. Dat speelt zich allemaal af binnen de schoolwereld en het heeft natuurlijk niet zoveel te maken met de echte maatschappelijke werkelijkheid, waar niet de rekenvaardigheid maar *functionele situaties* in beroep en maatschappij het startpunt zijn. In die situaties kan de burger al dan niet met vrucht de eenmaal verworven kennis en vaardigheden mobiliseren en zinvol inzetten om een situatie te verhelderen, te structuren of in goede banen te leiden. Binnen het reguliere onderwijs doen we daar amper iets aan, terwijl termen als maatschappelijk niveau en burgerschap dat wel impliceren. De stap van de schoolse formulering van de referentieniveaus 2F en 3F naar de echte situaties in het dagelijks leven en de beroepen moet nog worden gemaakt. Zie bijvoorbeeld de publicatie ‘Gecijferdheid’. Zeker voor het mbo is het de moeite waard om in een ontwikkelingsproject uit te gaan van functionele situaties en daarbij de vereiste bekwaamheden in rekenen & wiskunde te formuleren.

Aanbeveling 14 Functionele situaties
Het is wenselijk om met name in het mbo een ontwikkelingsproject uit te voeren, waarin de functionele situaties in maatschappij en beroep het startpunt zijn voor de ontwikkeling van burgerschapscompetenties, waarin de basisvaardigheden uit rekenen & wiskunde een rol kunnen spelen.

4.4 Omstreeks 18 jaar

Op de leeftijd van omstreeks 18 jaar (17 jaar 5 havo, 20 jaar 4 mbo) wordt het beeld verder gedifferentieerd. Voor deze leeftijd is een derde referentieniveau geformuleerd, weer met twee kwaliteiten, een basiskwaliteit 3F en een streefkwaliteit 3S. De volgende groepen leerlingen zijn te onderscheiden:

- Leerlingen die na afronding van vmbo of mbo niveau 2 aan het werk zijn. Voor hen geldt het referentieniveau 2F als maatschappelijk gewenste basis.
- Leerlingen met een middenkaderopleiding (mbo 4) in een sector of beroep waarin ze weinig doen met rekenen & wiskunde. Voor hen geldt dat ze minimaal referentieniveau 2F moeten onderhouden.
- Leerlingen met een middenkaderopleiding (mbo 4) die in hun sector, beroep of vervolgopleiding in het hbo niet voldoende hebben aan referentieniveau 2F en dat moeten uitbouwen naar 3F. Dit is een gevorderde kwaliteit voor verbreding en toespitsing van 2F.
- Leerlingen met een middenkaderopleiding (mbo 4) of in 5 havo die een meer geavanceerde competentie in rekenen en wiskunde nodig hebben. Denk daarbij bijvoorbeeld aan middenkaderopleidingen in de techniek en pabo. Voor deze leerlingen is de streefkwaliteit 3S geformuleerd. Deze kwaliteit komt ongeveer overeen met het rekendomein in het vak wiskunde A in het examenprogramma havo, maar kan in technische mbo-richtingen meer toegespitst zijn.

Leerlingen met wiskunde B havo of een afgeronde vwo-opleiding halen zonder meer de kwaliteit 3S. Voor hen is geen apart vierde referentieniveau geformuleerd.

5 Getallen, verhoudingen, meten en meetkunde en verbanden

5.1 Vier subdomeinen

Binnen het leergebied van rekenen & wiskunde zijn een aantal samenhangende clusters van begrippen en methoden te onderscheiden, die we subdomeinen noemen. Die terminologie drukt uit dat het essentieel is om bij het formuleren van leerdoelen of van kennis en vaardigheden of van eindtermen de samenhang van de te verwerven kennis in het vizier te houden. Binnen rekenen & wiskunde gaat het zelden om een afzonderlijke routine of een losstaand feit, maar is er altijd een relatie met onderliggende begrippen en andere routines of feiten. Zo is het doorzien van de structuur van de getallen en de relaties tussen getallen (PPON: *Getallen en getalrelaties*) een noodzakelijke voorwaarde voor het blijvend beheersen van bewerkingen met getallen, maar blijkens PPON 2004 geen voldoende voorwaarde. Aan het leren beheersen van die bewerkingen en de onderliggende algoritmen moet speciaal aandacht worden besteed, om blijvende leerresultaten te bereiken. Aan de andere kant garandeert bijvoorbeeld het stevig inoefenen van een algoritme voor het oplossen van een eerstegraads vergelijking niet dat leerlingen het begrip van wat een vergelijking is gaan verwerven of de relatie doorzien tussen een vergelijking en het snijpunt van twee grafieken of tussen een vergelijking en formules voor verbanden tussen grootheden. Analoog ligt aan het *met verstand* kunnen gebruiken van een rekenmachine voor het uitvoeren van een ingewikkelde berekening een inzicht ten grondslag over de keuze van de uit te voeren operaties en een notie van een mogelijke uitkomst (benaderend rekenen).

Het leergebied rekenen & wiskunde is op verschillende manieren te ordenen in samenhangend clusters of netwerken of subdomeinen. In het visiedocument van cTWO '*Rijk aan betekenis*' wordt gesproken over:

> *"Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule,functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen."*

In PPON-2004 wordt een groot aantal subdomeinen van rekenen & wiskunde onderscheiden, namelijk *Getallen en getalrelaties*, *Basisautomatismen*, *Hoofdrekenen*, *Schattend rekenen*, *Bewerkingen*, *Rekenen met de zakrekenmachine*, *Verhoudingen, breuken en procenten*, *Meten, meetkunde en tijd*. Voor de beschrijving van de verschillende referentieniveaus en kwaliteiten hebben wij gekozen voor vier subdomeinen, die het overgrote geheel aan leerlijnen rekenen & wiskunde vanaf de 12-jarigen in groep 8 tot en met de 18-jarigen bevatten. We geven een korte inhoudelijke schets van de inhoud van die subdomeinen.

5.2 Getallen

Dit subdomein krijgt al veel aandacht in het basisonderwijs en betreft daar zowel het getalbegrip als de bewerkingen met getallen. In het PPON-onderzoek wordt een belangrijk deel van de zo verworven kennis en vaardigheden getoetst. Zie voor de structuur en de resultaten hoofdstuk 6. In alle vervolgonderwijs zal de verworven kennis moeten worden onderhouden en steeds weer geactualiseerd en geautomatiseerd.

"*Rijk aan betekenis*" spreekt als volgt over het vervolg in havo-vwo:

> *"Onder het getalbegrip valt inzicht in de opbouw van het getalsysteem: natuurlijke getallen, rationale getallen, reële getallen, en in wiskunde D ook complexe getallen, alle in samenhang met hun bewerkingen. Rekenen met breuken en verhoudingen (procenten, driehoeksmeetkunde) zijn belangrijke aspecten van dit kernconcept. Het is van belang voor alle leerlingen in de onderbouw, ongeacht de latere profielkeuze."*

Voor het vmbo gaat het voor dit subdomein veel meer dan op havo-vwo om het onderhouden en verbreden van de verworven begrippen en methoden uit het basisonderwijs met een zwaar accent op het leren gebruiken van deze kennisbasis in een brede range van situaties, die deze leerlingen in de maatschappij, de sectoren en de beroepen tegen kunnen komen.

5.3 Verhoudingen

Dit subdomein omvat veel (maatschappelijke) toepassingsproblemen, want het *gebruiken* van een kennisbasis uit rekenen & wiskunde betreft vaak verhoudingsproblemen waarvan het oplossen kennis, vaardigheden en inzicht vraagt op diverse terreinen van het rekenen. Verhoudingen kunnen worden beschreven:

- in *verhoudingentaal*, zoals bij 'één op de tien Nederlanders' of 'het aantal fietsers is twee keer zo groot als het aantal automobilisten';
- in *breukentaal*, bijvoorbeeld 'driekwart van de inwoners is ouder dan 25 jaar';
- met *procenten*, zoals 70 procent van de mensen is voor de aanleg van een randweg.

Begrip van verhoudingen houdt in dat de relatie tussen die verschillende beschrijvingen kan worden gelegd en dat leerlingen dit begrip kunnen inzetten bij het met succes oplossen van verhoudingsvraagstukken.
In het primair onderwijs wordt een begin gemaakt met de opbouw van dit subdomein (zie voor PPON hoofdstuk 6) en in het vmbo en de onderbouw havo-vwo wordt vooral in de component *functioneel gebruiken* een stevige basis gelegd. Dat is van belang omdat juist op deze begrippen en methoden in het mbo-hbo (economisch, medisch en technisch rekenen) en in beroepssituaties een beroep wordt gedaan.

5.4 Meten en Meetkunde

Aan de beide subdomeinen *Meten* en *Meetkunde* wordt in het basisonderwijs de nodige aandacht besteed en het bereikte vaardigheidsniveau voor het meten van lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht wordt in PPON beoordeeld (zie hoofdstuk 6) evenals het oplossen van toepassingsopgaven. Beide subdomeinen lopen door in het voortgezet onderwijs, waarbij de *Meetkunde* in havo-vwo de meeste aandacht krijgt. Gelet op de toepassingswaarde van *Meten* in allerlei maatschappelijke situaties en beroepssituaties is het de moeite waard om ook voor dat netwerk referentieniveaus te beschrijven. De intrinsieke waarde van *Meetkunde*, als een manier om de ruimte om ons heen te beschrijven in combinatie met het zinvol toepassen van kennis en vaardigheden uit het netwerk *Meten* rechtvaardigen het bespreken van beide conceptuele netwerken in één samenhang. De meetkundige aspecten die vooral zijn bedoeld als voorbereiding op een meer exacte leerlijn, laten we buiten beschouwing.

5.5 Verbanden

In het basisonderwijs wordt weinig werk gemaakt van een mogelijke eerste aanzet voor het subdomein "Verbanden" in de vorm van het bestuderen van grafieken en diagrammen die numerieke gegevens uit tabellen visualiseren of het verband tussen twee grootheden of hoeveelheden. Ook de overgang naar de informele algebra, zoals het ontdekken en voortzetten van een regelmaat in patronen van stippen of blokjes of van getalpatronen of het generaliseren naar een woordformule behoren in het basisonderwijs (voor de betere leerlingen) tot dit conceptuele netwerk. Volgens een analyse van TIMSS-resultaten blijft de Nederlandse opbrengst (of beter gezegd het Nederlandse onderwijs) hierop duidelijk achter bij vergelijkbare landen.
In het voortgezet onderwijs staan in het vak wiskunde vanaf het eerste leerjaar in het vmbo en de onderbouw van het havo-vwo de *Verbanden* centraal, met als verschijningsvormen de context in woorden (bijvoorbeeld het vergelijken van twee abonnementen op toegang tot een dierentuin), de tabel met twee kolommen gegevens, de grafiek als visualisering van het verband en de (woord)formule met twee of meer variabelen. We bevinden ons hier op het grensgebied van rekenen en algebra en beperken ons tot de studie van deze vier representaties (verbaal, tabel, grafiek, formule), zoals die tot en met 4 vmbo worden onderwezen.
De meer formelere algebra met het herleiden van algebraïsche expressies en de algoritmen voor het algebraïsch oplossen van vergelijkingen laten we buiten deze studie van de leerlijnen rekenen en wiskunde. Het lezen en interpreteren van een betekenisvolle formule rekenen we nog wel mee, gelet op de frequentie waarmee formules in allerlei vakgebieden voorkomen.

> 'Kinderen beweren soms dat ze bepaalde dingen van rekenen niet gehad hebben, maar ze zijn het totaal vergeten. Als je het wel aanbiedt als leerkracht, maar kinderen onvoldoende tot automatiseren brengt dan zijn ze het vaak weer snel vergeten'

6 Referentieniveaus in opgaven

6.1 Werkwijze

In hoofdstuk 4 zijn de uitgangspunten voor de operationalisering van de verschillende referentieniveaus al aangegeven. In dit hoofdstuk concentreren we ons op de bepaling van de niveaus van het einde van het basisonderwijs, 1F en 1S, waarbij de gegevens van het onderzoeksproject PPON2004 een belangrijke rol hebben gespeeld. Enerzijds kijken we naar de inhoud en formuleren we wat een wenselijke opbrengst is van het basisonderwijs, anderzijds kijken we naar wat haalbaar lijkt voor de onderwijspraktijk, zonder de huidige situatie als norm te accepteren. We kiezen dus voor een balans tussen inhoudelijke argumenten en haalbaarheid.
De PPON-opgaven zijn aan deskundigen voorgelegd die er een bepaalde standaard over een wenselijk niveau van beheersing aan hebben toegekend. Harskamp stelt in zijn rapport aan de Expertgroep: “Nadeel van deze manier van ontlokken van uitspraken bij deskundigen is dat men op deze manier een (inter)subjectief wenselijke situatie krijgt voorgeschoteld. De standaarden zijn niet expliciet gebaseerd op de vereiste entreeniveaus in het vervolgonderwijs en men mag daarom twijfelen aan de validiteit (voorspellende waarde) waarde van de standaarden voor de schoolloopbaan. Anderen (zie van de Craats 2007) wegen dat oordeel van de deskundigen wel zwaar mee in de beoordeling van de kwaliteit van de uitstroom van het basisonderwijs. Als werkgroep hebben we voor het domein rekenen & wiskunde zowel de empirische gegevens (wie kan deze opgave nu goed maken) als ons inhoudelijk oordeel en onze kennis van het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs meegewogen in de uiteindelijke beschrijving van de beide eerste referentieniveaus 1F en 1S.

Aan de hand van een enkel voorbeeld lichten we de gekozen werkwijze en onze ambitie gebaseerd op de analyse in hoofdstuk 1 toe. Onze inhoudelijke afweging is dat leerlingen die de route gaan volgen van het algemeen maatschappelijk niveau 1F-2F-3F na het basisonderwijs met voldoende bagage kunnen instromen in het vmbo bb-kb en daar uiteindelijk eind 4 vmbo het burgerschapsniveau 2F bereiken. (In PPON 2004 stroomt 30% van de steekproef door naar vmbo bb-kb, in 2007 deed 35% van de gehele leerlingenpopulatie het examen vmbo bb-kb.) Globaal gesproken nemen we voor 1F opgaven uit het 25^{e} percentiel (P25) van PPON2004 als voorbeeld voor het niveau 2F bij onze doelbeschrijvingen. Bij een opgave P25 hoort de verwachting dat 25% die niet goed maakt. Die keuze om als ondergrens van 1F een P25-opgave aan te nemen, houdt een flinke ambitie in, want op dit moment beheerst het merendeel van de groep leerlingen die instroomt in vmbo BB-KB die opgave matig of onvoldoende. Dat moet beter, zo oordeelt de Expertgroep.
Voor het referentieniveau 1S is de inhoudelijke afweging dat leerlingen die de route van 1S naar 2S en eventueel 3S gaan volgen na het basisonderwijs met voldoende bagage kunnen instromen in vmbo-t of havo-vwo om daar met vmbo t/gl af te ronden met 2S of in havo-vwo door te gaan naar 3S. (In PPON 2004 stroomt 30% van de steekproef door naar vmboTL en 40% naar havo-vwo.) Globaal gesproken nemen we voor 1S opgaven uit het 50^{e} percentiel (P50) van PPON2004 als voorbeeld bij onze doelbeschrijvingen. Bij een P50-opgave hoort de verwachting dat 50% die niet goed maakt. Die keuze om als ondergrens van 1S een P50-opgave aan te nemen, houdt een flinke ambitie in, want op dit moment maakt bijna een derde deel van de groep leerlingen die instroomt in vmboTL of havo-vwo (de 70% van de steekproef van PPON) die opgave niet goed. Ook dat moet beter, zo oordeelt de Expertgroep.
In het verlengde van aanbeveling 2 formuleren we in termen van referentieniveaus de ambitie voor het basisonderwijs.

Aanbeveling 15 Ambitie referentieniveaus 1F en 1S
- *Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1F behaalt moet toenemen van 75% naar 85%.*
- *Het percentage leerlingen dat minimaal het referentieniveau 1S behaalt moet toenemen van 50% naar 65%.*

‘Voor mij geven de referentieniveaus meer duidelijkheid over de inhoud van taal en rekenen’

Voor de concretisering van het algemeen maatschappelijk referentieniveau 2F is in de eerste plaats gekeken naar het niveau van de opgaven uit het rekendomein van het examenprogramma wiskunde van vmbo bb-kb en voor 3F is dat niveau wat verbreed en onderhouden. Voor 2S is in de eerste plaats gekeken naar het rekendomein van het examenprogramma wiskunde vmbo-t, voor 3S naar het rekendomein van het nieuwe examenprogramma wiskunde A en de gewenste vakinhoudelijke kwaliteit voor instroom in de pabo.

6.2 Getallen als voorbeeld

In hoofdstuk 7 zijn de doelbeschrijvingen voor het subdomein *Getallen*, toegelicht met voorbeeldopgaven, terug te vinden. In deze paragraaf wordt de problematiek voor het subdomein geschetst. We volgen eerst de analyse van J. van de Craats van het PPON-onderzoek. Hij geeft overeenkomstig het oordeel van de geraadpleegde deskundigen weer welk percentage van de leerlingen aan de standaard Voldoende voldoet, een standaard die volgens hen door 70-75% van de leerlingen zou moeten worden gehaald.

Getallen en bewerkingen

1. Getallen en getalrelaties: 42% haalt voldoende.
2. Basisoperaties optellen en aftrekken: 76% haalt voldoende.
3. Basisoperaties vermenigvuldigen en delen: 66% haalt voldoende.
4. Hoofdrekenen optellen en aftrekken: 50% haalt voldoende.
5. Hoofdrekenen vermenigvuldigen en delen: 66% haalt voldoende.
6. Schattend rekenen: 42% haalt voldoende.
7. Bewerkingen optellen en aftrekken: 27% haalt voldoende.
8. Bewerkingen vermenigvuldigen en delen: 12% haalt voldoende.
9. Samengestelde bewerkingen: 16% haalt voldoende.
10. Rekenen met een zakrekenmachine: 34% haalt voldoende.

Het probleem zal duidelijk zijn. Deskundigen (en andere verstandige mensen) verwachten een veel hogere leeropbrengst voor rekenen van het basisonderwijs dan nu wordt gerealiseerd. En in de twintig jaar van de PPON-onderzoeken is dat steeds het geval geweest zonder dat er veel met dat gegeven is gedaan. De beschrijving van de referentieniveaus 1F en 1S maakt het mogelijk om de ambitie te formuleren in termen van een gewenste niveauverhoging, maar dan wel door de haalbaarheid mee te wegen. Dat is gedaan in de hoofdstukken 7 tot en met 10.

Dit subdomein *Getallen* staat terecht centraal in het basisonderwijs en het is funderend voor alle vervolgroutes. Helderheid, stabiliteit en duidelijkheid over wat leerlingen op dit gebied moeten bereiken is noodzakelijk. Een verschuivende aandacht op dit gebied, zoals Harskamp als verklaring van tegenvallende resultaten veronderstelt, is ongewenst zonder dat daar maatschappelijk en in een breed onderwijsveld overeenstemming over is bereikt. Ook het voortgezet onderwijs heeft daar alle belang bij.

J. van de Craats geeft vanuit de structuur van het getalsysteem onderstaand overzicht van dit subdomein *Getallen* voor het basisonderwijs. In hoofdstuk 7 wordt die structuur omgezet in doelbeschrijvingen en voorbeelden om operationeel aan te geven wat leerlingen moeten kennen en kunnen. In onze uiteindelijke keuze van doelen voor de referentieniveaus (zie hoofdstuk 7) heeft de haalbaarheid zwaar meegewogen.
De elegantie van de eenvoudige structuur van dit subdomein *Getallen* is niet terug te vinden in de andere subdomeinen, zoals *Verhoudingen* (sterk gericht op *functioneel gebruiken*) of *Verbanden* (allerlei manieren om relaties tussen grootheden te representeren) of Meten en Meetkunde (onder te verdelen in diverse subdomeinen). We hebben ervoor om de presentatie voor alle vier subdomein ter wille van de leesbaarheid zoveel mogelijk parallel te laten verlopen.

Doelbeschrijving vanuit de structuur van het getalsysteem.

1 Rekenen met natuurlijke getallen

Leerlingen kennen de manier waarop ons decimale positiestelsel is opgebouwd.
Zij kennen de betekenis van cijfers en hun plaats in getallen.
Zo weten zij dat 6498 = 6×1000+4×100+9×10+8. Zij weten dat op die manier met behulp van slechts tien cijfers (namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) elk natuurlijk getal kan worden weergegeven.

1.1 Hoofdrekenen

Leerlingen kunnen vlot en zonder enige aarzeling de volgende berekeningen uit het hoofd uitvoeren:

a. Twee getallen van één cijfer bij elkaar optellen.
Voorbeelden: 3 + 5 = 8, 7 + 9 = 16, 2 + 8 = 10.
b. Een getal van één cijfer optellen bij een getal van twee cijfers.
Voorbeelden: 23 + 5 = 28, 77 + 9 = 86, 52 + 8 = 60.
c. Twee getallen kleiner dan twintig van elkaar aftrekken (het kleinste van het grootste).
Voorbeelden: 8 - 5 = 3, 19 - 12 = 7, 17 - 9 = 8, 12 - 7 = 5.
d. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, bij elkaar optellen.
Voorbeelden: 30 + 50 = 80, 7000 + 9000 = 16000, 200 + 80 = 280, 9000 + 30 = 9030.
e. Twee getallen van één cijfer met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: 3 × 5 = 15, 7 × 9 = 63, 2 × 8 = 16.
f. Een getal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000, enzovoort.
Voorbeelden: 345 × 10 = 3450, 52 × 100 = 5200, 979 × 1000 = 979000.
g. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: 30 × 50 = 1500, 7000 × 9 = 63000, 200 × 80 = 16000, 400 × 300 = 120000.
h. Een getal dat eindigt op een nul delen door 10, een getal dat eindigt op twee nullen delen door 100, enzovoort.
Voorbeelden: 560 : 10 = 56, 36000 : 100 = 360, 606000 : 1000 = 606.
i. Een deling, al dan niet met rest, uitvoeren als de deler een getal van één cijfer is, en het deeltal kleiner is dan tien maal de deler.
Voorbeelden: 56 : 7 = 8, 36 : 9 = 4, 66 : 7 = 9 rest 3, 77 : 9 = 8 rest 5.

1.2 Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren:

a. Optellen van twee of meer getallen (optellen onder elkaar).
b. Aftrekken van een getal van een groter getal (aftrekken onder elkaar).
c. Vermenigvuldigen van twee getallen (vermenigvuldigen onder elkaar).
d. Delen met rest (staartdeling of een gelijkwaardige procedure).

2 Rekenen met kommagetallen

Leerlingen kennen de betekenis van kommagetallen en hun plaats op de getallenlijn. Ze kennen kommagetallen in tal van praktijksituaties, bijvoorbeeld bij het rekenen met geldbedragen of bij het gebruik van schaalverdelingen op linialen en andere meetinstrumenten.

2.1 Hoofdrekenen

Leerlingen kunnen vlot en zonder aarzelen de volgende rekenbewerkingen uit het hoofd uitvoeren:

a. Een kommagetal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000 enzovoort.
b. Een kommagetal delen door 10, 100, 1000 enzovoort.
c. Procenten omzetten in kommagetallen en omgekeerd.
Voorbeeld: 15% = 0,15, 0,2% = 0,002, 235% = 2,35.
d. Een kommagetal afronden op een gegeven aantal decimalen (plaatsen achter de komma).

2.2 Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren:

a. Optellen van twee of meer kommagetallen (optellen onder elkaar).
b. Aftrekken van een kommagetal van een groter kommagetal (aftrekken onder elkaar).
c. Vermenigvuldigen van twee kommagetallen (vermenigvuldigen onder elkaar).
d. Het omzetten van een deling met kommagetallen in een deling waarbij de deler een natuurlijk getal is, vervolgens de deling uitvoeren, en tenslotte, indien gevraagd, het quotiënt afronden op een gegeven aantal decimalen.

Voorbeeld: 1,452 : 0,17 = 145,2 : 17. Dit levert na uitvoering van de deling en afronden op twee decimalen als uitkomst 8,54.

2.3 Toepassingen

Leerlingen kunnen rekenen met kommagetallen in de volgende toepassingen (contexten):

a. Rekenen met geldbedragen.
b. Rekenen met verhoudingen en procenten.
c. Rekenen in het metrieke stelsel voor lengte, oppervlakte (van rechthoeken), inhoud (van rechthoekige blokken) en gewicht.
d. Rekenen met tijd (uren, minuten, seconden) en snelheid (kilometers per uur en meters per seconde).
e. Omrekenen van meters per seconde naar kilometers per uur en omgekeerd.
f. Omrekenen van valuta, bijvoorbeeld euro’s naar dollars, bij een gegeven wisselkoers.

Bij al deze toepassingen kunnen leerlingen contextopgaven in rekenopgaven vertalen, oplossen en de uitkomsten in termen van de context interpreteren. Zij kunnen de berekeningen in eenvoudige gevallen met de hand (pen en papier) uitvoeren.
Bij lastiger opgaven kunnen zij een rekenmachine gebruiken.
In dat geval kunnen zij vooraf met pen en papier of uit het hoofd een schatting maken van de uitkomst.

7 De operationalisering voor *Getallen*

7.1. Inleiding

Er is gekozen voor het beschrijven van het conceptuele netwerk rond getallen. Het gaat bij verstand hebben van getallen niet alleen om de reken/wiskundige 'werktuigen' en begrippen, maar ook om de relaties daartussen. Samengevat omvat dit netwerk de gebieden: getallen (geheel, decimaal, breuken, machten en wortels), de bewerkingen ermee (+,- , ×, ÷ en machtsverheffen, worteltrekken) en toepassingen. Omdat dit voor het rekenen & wiskundeonderwijs een groot en belangrijk gebied is, met name in het basisonderwijs, beschrijven we het wat uitgebreider dan de andere subdomeinen. We baseren ons daarbij op diverse bronnen, en nemen uit enkele ook beschrijvingen over, dat betreft PPON 2004, Minimumdoelen PO (Noteboom, 2007) en Domeinbeschrijving Rekenen (Van de Craats, 2007).

In het primair onderwijs wordt gerekend met natuurlijke getallen, kommagetallen en breuken. Natuurlijke getallen zijn getallen waarmee je aantallen kunt weergeven: 5 vingers aan je hand, 12 appels op een schaal, 60 minuten in een uur,16 miljoen Nederlanders, 0 euro in je portemonnee. Het is van belang de manier te kennen waarop ons decimale positiestelsel is opgebouwd. Hieronder valt het kennen van de betekenis van cijfers en hun plaats in getallen, bijvoorbeeld weten dat $6498 = 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 9 \times 10 + 8$ en dat op die manier met behulp van slechts tien cijfers (namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) elk natuurlijk getal kan worden weergegeven.

Kommagetallen (decimale breuken, decimaalgetallen) zijn getallen zoals 354,27 en 0,067. De betekenis en de plaats kennen van kommagetallen op de getallenlijn komt ook in het po aan bod. Kommagetallen komen voor in tal van praktijksituaties, bijvoorbeeld bij het rekenen met euro's, bij schaalverdelingen, bij het bepalen van maten en gewichten of bij het rekenen met verhoudingen en procenten. Ook in de beschrijving van de domeinen Verhoudingen en Meten & Meetkunde komen dus kommagetallen voor.

Breuken zijn getallen zoals $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{15}{29}, \frac{15}{4}$. In het po leren leerlingen breuken, als deel van geheel, visualiseren door middel van bijvoorbeeld pizzadiagrammen (taartdiagrammen) en stroken. Daarnaast is ook aandacht voor de breuk als 'getal' en de plaats ervan op de getallenlijn en voor de betekenis van termen als teller, noemer en breukstreep.

Negatieve getallen zijn getallen onder nul, die links van 0 op de getallenlijn liggen. Gehele negatieve getallen, negatieve decimale getallen en breuken krijgen afhankelijk van het schooltype aandacht in het vo. Zowel het ordenen en plaatsen van negatieve getallen op de getallenlijn als bewerkingen uitvoeren met negatieve getallen komen aan bod.

Tot het onderwijs in het vo horen naast de eerder genoemde getalsoorten ook nog machten, wortels en bijzondere getallen als π.

De bewerkingen met getallen kunnen met het hoofd, op papier of met de rekenmachine worden uitgevoerd. In het basisonderwijs ligt de nadruk op de eerste twee manieren. Met het begrip *hoofdrekenen* wordt bedoeld dat leerlingen een aantal bewerkingen vlot, handig en inzichtelijk kunnen uitvoeren. Daarbij kan de leerling kennis van getallen, basisoperaties en eigenschappen van bewerkingen inzetten. Wij verstaan hieronder dat in de praktijk een leerling bij hoofdrekenen waar nodig de berekening of tussenstappen daarvan mag opschrijven. Dus *met* het hoofd rekenen in plaats van *uit* het hoofd. Dit wijkt af van wat in PPON onder hoofdrekenen verstaan wordt.

In het voortgezet onderwijs wordt zoals hierboven gezegd, afhankelijk van het onderwijstype, ook gerekend met negatieve getallen, machten en wortels. Hiermee werken leerlingen vaak met de rekenmachine (in eenvoudige gevallen ook uit het hoofd). In de bovenbouw van havo en vwo wordt ook exact met machten en wortels gerekend.

7.2 Referentieniveau 1 (12 jaar)

Het conceptuele netwerk rond *Getallen* wordt voor het grootste deel ontwikkeld in het basisonderwijs. Het gaat daar om verstand hebben van drie soorten getallen (geheel, decimaal, breuken) en om de operaties optellen, aftrekken vermenigvuldigen en delen daarmee. Daarnaast is het gebruiken van getallen in praktische situaties van belang. In 2006 zijn de volgende kerndoelen po geformuleerd op het gebied van getallen en bewerkingen:

26 De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.
27 De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uitvoeren, waarbij optellen en aftrekken tot 20 en de tafels van buiten gekend zijn.
28 De leerlingen leren schattend tellen en rekenen.
29 De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
30 De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures.
31 De leerlingen leren de rekenmachine met inzicht te gebruiken.

In diverse publicaties (TAL, TULE) zijn deze kerndoelen uitgewerkt en toegelicht en in de rekenmethodes worden ze geconcretiseerd. De *fundamentele kwaliteit* op dit referentieniveau (1F) beschrijft het minimum dat beheerst zou moeten worden op het gebied van getallen, getalrelaties en het rekenen (hoofdrekenen, procedures voor bewerkingen) aan het eind van de basisschool. We zijn daarbij uitgegaan van wat we noodzakelijk en wenselijk achten, rekening houdend met de haalbaarheid. Ons algemene uitgangspunt is dat we ons voor de vaardigheden voor deze kwaliteit baseren op dat wat de percentiel 25 leerlingen in PPON 2004 goed beheersen (dit is dus dat wat 25% van de leerlingen matig of onvoldoende beheerst); dit is echter geen rigide norm. Zo is voor het onderdeel bewerkingen ook gekeken naar PPON resultaten uit eerdere jaren, omdat op dat onderdeel toen beter werd gepresteerd. We vinden het bijvoorbeeld noodzakelijk voor deze kwaliteit dat de bewerkingen met natuurlijke getallen in het getalgebied tot 1000 beheerst worden. Het beheersen van (formele) bewerkingen met breuken vinden we voor de fundamentele kwaliteit minder van belang.
Het gaat dus voor 1F vooral om basale kennis, inzicht en vaardigheden in met eenvoudige getallen. We sluiten aan bij de voorwaarden en het voorstel voor de minimumdoelen zoals geformuleerd door SLO (Noteboom, 2007):

De volgende voorwaarden zijn in acht genomen bij de ontwikkeling:
- de doelen moeten de kerndoelen dekken
- de doelen moeten passen bij het vervolgaanbod in het voortgezet onderwijs (garanderen dat er geen hiaten zijn)
- de doelen moeten passen bij de voorwaarden die de maatschappij (redzaamheid) van kinderen vraagt als zij van de basisschool afkomen
- de doelen moeten in beschrijving aansluiten bij het repertoire en onderwijs van de huidige leraar, zoals dat in gehanteerde rekenmethodes beschreven wordt.

Voor de *streefkwaliteit* hebben we ons gericht op wat de groep tussen percentiel 50 en percentiel 75 leerlingen bij PPON goed of voldoende beheersen. Daar zit natuurlijk nog een groep boven. De streefkwaliteit van dit niveau (1S) omvat de onderdelen uit de fundamentele kwaliteit (1F) en is ten opzichte hiervan een verdieping van de kennis en vaardigheden. Deze verdieping kenmerkt zich doordat (wiskundig) redeneren, formaliseren en generaliseren ('weten waarom') verweven wordt met de onderdelen die ook op 1F voorkomen. Zo moeten deze leerlingen onder andere goed inzicht hebben in het decimale stelsel en moeten ze weten dat er voor elke bewerking procedures zijn die altijd werken.
Daarnaast is er sprake van het verleggen van accenten. Zo zit er onder andere verschil tussen de fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteit in de soort getallen waarmee (met pen en papier) gerekend wordt. Een goede beheersing van het getalgebied tot 100 (en soms tot 1000) wordt nagestreefd voor 1F, alsmede het werken met eenvoudige decimale getallen en veelvoorkomende breuken. Voor 1S gaat het om de bewerkingen in het hele gebied van de natuurlijke getallen en met complexere decimale getallen. Bewerkingen met breuken zijn op 1S voornamelijk beperkt tot bewerkingen in betekenisvolle situaties (zie de voorbeelden in de tabel aan het eind van dit hoofdstuk). Formeel opereren met breuken komt op 1S beperkt aan bod (optellen en aftrekken).
Het is echter raadzaam toekomstige havo/vwo leerlingen al in het basisonderwijs kennis te laten maken met alle formele procedures voor bewerkingen met breuken.

7.3 Referentieniveau 2 (16 jaar)

Na het po moeten de kennis en vaardigheden worden geconsolideerd en onderhouden. In het vo wordt beperkt aandacht besteed aan 'basale rekenvaardigheden' (getalbegrip, basisoperaties, bewerkingen). Er wordt vanuit gegaan dat dit gebied is afgerond in het po. Wel is er – in onder meer in de uitwerking van de kerndoelen voor de onderbouw VO - expliciet aandacht voor onderhoud en consolidatie van schatten en benaderend rekenen en het werken met een rekenmachine.

22 De leerling leert de structuur en samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, breuken, procenten en verhoudingen, en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties
23 De leerling leert exact en schattend rekenen en redeneren op basis van inzicht in nauwkeurigheid, orde van grootte en marges die in een gegeven situatie passend zijn.

Er is in het vo ook sprake van uitbreiding en verdieping van het conceptuele netwerk rond getallen: negatieve getallen en irrationale getallen (wortels, π) worden geïntroduceerd en de kennis over en inzicht in getalsystemen ("weten waarom") neemt een belangrijker plaats in.

Bij het beschrijven van het tweede referentieniveau (16 jaar, 4 vmbo) zijn ook de examenprogramma's wiskunde vmbo betrokken. Wiskunde is op dit moment een verplicht examenvak voor de sectoren *Techniek* en *Landbouw*. Het bevat eindtermen

'Het gevaar van werken met referentieniveaus is dat het leidt tot 'koker-kijken' en leerlingen moeten zich wel ontwikkelen tot mensen die rijp zijn voor functioneren in onze maatschappij'

voor het domein genaamd: rekenen, meten, schatten.
Deze eindtermen zijn dus niet uitgesplitst over de in het po gebruikelijke deelgebieden. Een deel van deze eindtermen valt onder ons subdomein 'getallen', het gaat om de volgende selectie:

De kandidaat kan
1 Handig rekenen in alledaagse situaties:
- bij het rekenen en vermelden van resultaten gebruik maken van gangbare begrippen en voorvoegsels zoals miljoen, miljard en milli-, centi-, kilo-,
- het resultaat van een berekening afronden in overeenstemming met de gegeven situatie,

2 Een rekenmachine gebruiken:
- met een rekenmachine optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen,
- met een rekenmachine breuken, procenten, machten en wortels berekenen of benaderen als eindige decimale getallen,
- gebruik maken van de functietoetsen voor het rekenen (niet voor vmbo bb).

3 (Meten en) schatten:
- vooraf uitkomsten schatten van berekeningen (en meetresultaten).
- uitspraken doen over de orde van grootte en de nauwkeurigheid.

4 Basistechnieken gebruiken:
- in betekenisvolle situaties gelijknamige breuken optellen en aftrekken en eenvoudige breuken vermenigvuldigen en delen (niet voor vmbo bb),
- in betekenisvolle situaties eenvoudige breuken vermenigvuldigen met een geheel getal,
- in betekenisvolle situaties negatieve getallen ordenen, optellen en aftrekken vermenigvuldigen en delen (niet voor vmbo bb),
- hoofdbewerkingen in de afgesproken volgorde toepassen,
- bij het berekenen en bij het vermelden van resultaten gebruik maken van de wetenschappelijke notatie (niet voor vmbo bb).

Daarnaast is voor het vmbo ook gekeken naar het rekenen dat gebruikt wordt bij andere vakken. Daarvoor zijn onder meer examenprogramma's en examens van een aantal beroepsgerichte programma's geraadpleegd. In andere vakken vindt voor een deel ook onderhoud en consolidatie van het rekenen en getalbegrip plaats en daar wordt ook het rekenen en het onderliggende getallennetwerk gebruikt in diverse toepassingssituaties.

Voor de *fundamentele kwaliteit* 2F ligt de nadruk op het gebruik van getallen, getalrelaties en bewerkingen in situaties. Daarbij worden kennis en vaardigheden van 1F onderhouden. Bij het rekenwerk is meestal de rekenmachine toegestaan. Deze fundamentele kwaliteit beschrijft ook wat iedere Nederlander zou moeten kennen en kunnen op het gebied van getallen en bewerkingen. Bij het toepassen van kennis en vaardigheden uit dit subdomein gaat het meestal niet om 'het kale rekenen' en de getallen op zichzelf. Getallen en het rekenen ermee komen voor in betekenisvolle situaties. Getallen zijn dan vaak aantallen of grootheden (maten), ze verschijnen in tabellen met informatie en in de situaties gaat het vaak om rekenen met maten, verhoudingen en procenten. Voorbeelden van het gebruik van kennis en vaardigheden uit het subdomein getallen zijn dus voor algemeen maatschappelijke niveau (2F) niet uitsluitend te vinden in dit subdomein maar ook in alle overige subdomeinen.

De *streefkwaliteit* (2S) op dit referentieniveau bouwt voort op de streefkwaliteit van het eerste referentieniveau 1S. Het is niet zo dat 2S de fundamentele kwaliteit 2F geheel omvat. In 2F staat het toepassen en gebruiken centraal. Voor de streefkwaliteit 2S is ook een verdieping gewenst in de structuur van getalsystemen en een formalisatie van procedures voor diverse bewerkingen, bijvoorbeeld bewerkingen met breuken. Daarnaast is er soms sprake van uitbreiding: zo is het gebruik van de wetenschappelijke notatie voor 2F niet vereist maar voor de streefkwaliteit 2S wel.

7.4 Referentieniveau 3 (17- 20 jaar)

Voor het derde referentieniveau (mbo/havo/vwo) is rekening gehouden met het in ontwikkeling zijnde raamwerk rekenen & wiskunde mbo en zijn de examenprogramma's van havo en vwo geraadpleegd. In die examenprogramma's is momenteel weinig expliciet te vinden op het gebied van rekenen. Voor de toekomstige examenprogramma's zijn wijzigingen voorgesteld.

5. De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren met, maar ook zonder, gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.

Voor de *fundamentele kwaliteit* 3F is het rekenen vooral gericht op het gebruik van hetgeen in 2F en 1F aan bod is geweest in toepassingen. Deze kwaliteit wordt bereikt in het mbo (bijvoorbeeld op niveau 3 en 4 opleidingen met weinig rekenen &

wiskunde). Voor veel opleidingen in het mbo is het met name van belang het 'verstand hebben van getallen' te onderhouden en te consolideren. Dit onderhoud moet bij voorkeur zoveel als mogelijk plaatsvinden door het gebruiken van de betfeffende kennis en vaardigheden in toepassingssituaties.

Voor de streefkwaliteit 3S die voortbouwt op 2S moeten we denken aan leerlingen op de havo met wiskunde A. Bij deze kwaliteit zal de kennis over getalsystemen en de relaties tussen soorten getallen verdiept worden ("weten waarom") en wordt de relatie met algebra van groter belang. Het subdomein getallen is niet los zien van rekenkundige en algebraïsche inzichten en vaardigheden.

7.5 Concretisering

In de tabel op de volgende pagina's wordt het subdomein getallen geconcretiseerd. De inhoud wordt beschreven voor elk van de drie referentieniveaus en daarbinnen steeds voor de fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteit naast elkaar. Daarbij is sprake van een getrapte indeling, als eerste in:
A. Notatie, taal en betekenis
- Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties
- Wiskundetaal gebruiken

B. Met elkaar in verband brengen
- Getallen en getalrelaties
- Structuur en samenhang

C. Gebruiken
- Memoriseren, automatiseren
- Hoofdrekenen (noteren van tussenresultaten toegestaan)
- Hoofdbewerkingen (+, -, ×, :) op papier uitvoeren met gehele getallen en decimale getallen
- Bewerking met breuken (+, -, ×, :) op papier uitvoeren (vanaf 2S)
- Berekeningen uitvoeren om problemen op te lossen
- Rekenmachine op een verstandige manier inzetten

Daarbinnen is steeds het soort 'weten' omschreven, we onderscheiden drie soorten:
- Paraat hebben: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, routines, technieken.
- Functioneel gebruiken: probleemaanpak, toepassen, gebruiken, onderzoeksvaardigheden
- Weten waarom: begrijpen, principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht

Na de tabel zijn voorbeeldopgaven opgenomen om een beeld te geven van de beschreven inhouden en niveaus.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis – Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
	– 5 is gelijk aan (evenveel als) 2 en 3 – de relaties groter/kleiner dan – 0,45 is vijfenveertig honderdsten – breuknotatie met horizontale streep $\frac{3}{4}$, – teller, noemer, breukstreep	– breuknotatie herkennen ook als ¾
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– uitspraak en schrijfwijze van gehele getallen, breuken, decimale getallen – getalbenamingen zoals driekwart, anderhalf, miljoen	– gemengd getal – relatie tussen breuk en decimaal getal
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– orde van grootte van getallen beredeneren	– verschil tussen cijfer en getal – belang van het getal 0

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen – Getallen en getalrelaties – Structuur en samenhang	**Paraat hebben**	**Paraat hebben**
	– tienstructuur – getallenrij – getallenlijn met gehele getallen en eenvoudige decimale getallen	– getallenlijn, ook met decimale getallen en breuken
	Functioneel gebruiken	**Functioneel gebruiken**
	– vertalen van eenvoudige situatie naar berekening – afronden van gehele getallen op ronde getallen – globaal beredeneren van uitkomsten – splitsen en samenstellen van getallen op basis van het tientallig stelsel	– vertalen van complexe situatie naar berekening – decimaal getal afronden op geheel getal – afronden binnen gegeven situatie: 77,6 dozen berekend dus 78 dozen kopen
	Weten waarom	**Weten waarom**
	– structuur van het tientallig stelsel	– opbouw decimale positiestelsel – redeneren over breuken, bijvoorbeeld: is er een kleinste breuk?

NB. 1S omvat de inhouden van 1F

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Memoriseren, automatiseren – Hoofdrekenen (noteren van tussenresultaten toegestaan) – Hoofdbewerkingen (+, -, ×, :) op papier uitvoeren met gehele getallen en decimale getallen – Bewerkingen met breuken (+, -, ×, :) op papier uitvoeren – Berekeningen uitvoeren om problemen op te lossen – Rekenmachine op een verstandige manier inzetten	– uit het hoofd splitsen, optellen en aftrekken onder 100, ook met eenvoudige decimale getallen: 12 = 7 + 5 67 – 3 0 1 – 0,25 0,8 + 0,7 – producten uit de tafels van vermenigvuldiging (tot en met 10) uit het hoofd kennen: 3 × 5 7 × 9 – delingen uit de tafels (tot en met 10) uitrekenen: 45 : 5 32 : 8 – uit het hoofd optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met “nullen”, ook met eenvoudige decimale getallen: 30 + 50 1200 – 800 65 × 10 3600 : 100 1000 × 2,5 0,25 × 100 – efficiënt rekenen (+, -, ×, :) gebruik makend van de eigenschappen van getallen en bewerkingen, met eenvoudige getallen – optellen en aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) met gehele getallen en eenvoudige decimale getallen: 235 + 349 1268 – 385 € 2,50 + € 1,25 – vermenigvuldigen van een getal met één cijfer met een getal met twee of drie cijfers: 7 × 165 = 5 uur werken voor € 5,75 per uur – vermenigvuldigen van een getal van twee cijfers met een getal van twee cijfers: 35 × 67 = – getallen met maximaal drie cijfers delen door een getal met maximaal 2 cijfers, al dan niet met een rest: 132 : 16 = – vergelijken en ordenen van de grootte van eenvoudige breuken en deze in betekenisvolle situaties op de getallenlijn plaatsen: $\frac{1}{4}$ liter is minder dan $\frac{1}{2}$ liter – omzetten van eenvoudige breuken in decimale getallen: $\frac{1}{2}$ = 0,5; 0,01 = $\frac{1}{100}$ – optellen en aftrekken van veel voorkomende gelijknamige en ongelijknamige breuken binnen een betekenisvolle situatie: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$	– standaardprocedures gebruiken ook met getallen boven de 1000 met complexere decimale getallen in complexere situaties – delingen uit de tafels (tot en met 10) uit het hoofd kennen – ook met complexere getallen en decimale getallen: 18 : 100 1,8 × 1000 – volgorde van bewerkingen – efficiënt rekenen ook met grotere getallen – delen met rest of (afgerond) decimaal getal: 122 : 5 = – vergelijken ook via standaardprocedures en met moeilijker breuken – omzetten ook met moeilijker breuken eventueel met rekenmachine – optellen en aftrekken ook via standaardprocedures, met moeilijker breuken en gemengde getallen zoals $6\frac{3}{4}$

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In deze opsomming is geen verschil gemaakt tussen memoriseren en vlot (binnen enkele seconden) kunnen berekenen.
Een deel van de bewerkingen met breuken zoals ‘deel van’ kunnen bepalen, is beschreven in het subdomein verhoudingen.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken (vervolg)	Paraat hebben	Paraat hebben
– Memoriseren, automatiseren – Hoofdrekenen (notaties toegestaan) – Hoofdbewerkingen (+, -, ×, :) op papier uitvoeren met gehele getallen en decimale getallen – Bewerking met breuken (+, -, ×, :) op papier uitvoeren – Berekeningen uitvoeren om problemen op te lossen – Rekenmachine op een verstandige manier inzetten	– geheel getal (deel van nemen): $\frac{1}{3}$ deel van 150 euro – in een betekenisvolle situatie een breuk vermenigvuldigen met een	– ook een geheel getal vermenigvuldigen met een breuk of omgekeerd – vereenvoudigen en compliceren van breuken en breuken als gemengd getal schrijven: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$ $\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ – een breuk met een breuk vermenigvuldigen of een deel van een deel nemen, met name in situaties: $\frac{1}{2}$ deel van $\frac{1}{2}$ liter $\frac{3}{4}$ X $\frac{5}{8}$ – een geheel getal delen door een breuk of gemengd getal: 10 : $2\frac{1}{2}$ – een breuk of gemengd getal delen door een breuk, vooral binnen een situatie: $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; hoeveel pakjes van $\frac{1}{4}$ liter moet je kopen als je $1\frac{1}{2}$ liter slagroom nodig hebt
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– globaal (benaderend) rekenen (schatten) als de context zich daartoe leent of als controle voor rekenen met de rekenmachine: Is tien euro genoeg? € 2, 95 + € 3,98 + € 4,10 1589 – 203 is ongeveer 1600 – 200 - in contexten de “rest” (bij delen met rest) interpreteren of verwerken - verstandige keuze maken tussen zelf uitrekenen of rekenmachine gebruiken (zowel kaal als in eenvoudige dagelijkse contexten zoals geld- en meetsituaties) - kritisch beoordelen van een uitkomst	– standaardprocedures met inzicht gebruiken binnen situaties waarin gehele getallen, breuken en decimale getallen voorkomen
	Weten waarom	Weten waarom
	– interpreteren van een uitkomst ‘met rest’ bij gebruik van een rekenmachine	– weten dat er procedures zijn die altijd werken en waarom – decimale getallen als toepassing van (tiendelige) maatverfijning – kennis over bewerkingen: 3 + 5 = 5 + 3, maar 3 – 5 ≠ 5 – 3

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In de verschillende ‘cellen’ zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

Getallen – 16 en 17-20 jaar – fundament

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– schrijfwijze negatieve getallen: -3 °C, -150 m – symbolen zoals < en > gebruiken – gebruik van wortelteken, machten	– negatieve getallen (ook breuken en decimale getallen)
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– getalnotaties met miljoen, miljard: er zijn 60 miljard euromunten geslagen	– schrijfwijze grote getallen met behulp van machten, $2 \cdot 10^9$
	Weten waarom	Weten waarom
	– getallen relateren aan situaties; Ik loop ongeveer 4 km/u, Nederland heeft ongeveer 16 miljoen inwoners 3576 AP is een postcode Hectometerpaaltje 78,1 0,543 op bonnetje is gewicht 300 Mb vrij geheugen nodig	– werken met haakjes om de volgorde van bewerkingen te veranderen

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Getallen en getalrelaties – Structuur en samenhang	– negatieve getallen plaatsen in getalsysteem	– getallen (negatieve getallen, enkelvoudige breuken en decimale getallen) ordenen – getallenlijn gebruiken
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– getallen met elkaar vergelijken, bijvoorbeeld met een getallenlijn: historische tijdlijn, 400 v. Chr-2000 na Chr. – situaties vertalen naar een bewerking: 350 blikjes nodig, ze zijn verpakt per 6 – afronden op 'mooie' getallen: 4862 m^3 gas is ongeveer 5000 m^3	– complexere situaties vertalen naar een bewerking
	Weten waarom	Weten waarom
	– binnen een situatie het resultaat van een berekening op juistheid controleren: Totaal betaald aan huur per jaar €43,683 klopt dat wel?	– eigen repertoire opbouwen van getallen die gerelateerd zijn aan situaties

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
- Berekeningen uitvoeren met gehele getallen, breuken en decimale getallen	- negatieve getallen in berekeningen gebruiken: 3 – 5 = 3 + -5 = -5 + 3 - haakjes gebruiken - met een rekenmachine breuken, procenten, machten en wortels berekenen of benaderen als eindige decimale getallen	- berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	- van een uitkomst - resultaat van een berekening afronden in overeenstemming met de gegeven situatie	- resultaten van een berekening interpreteren
	Weten waarom	Weten waarom
	- bij berekeningen een passend rekenmodel of de rekenmachine kiezen - berekeningen en redeneringen verifiëren	

NB. 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F

Getallen – 16 en 17- 20 jaar – streef

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– verschillende schrijfwijzen van getallen met elkaar vergelijken	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– wetenschappelijke notatie rekenmachine gebruiken	– wetenschappelijke notatie rekenmachine gebruiken, ook met negatieve exponenten
	Weten waarom	Weten waarom
		– adequate (wiskunde)taal en notaties lezen en gebruiken als communicatiemiddel – inzicht in wiskundige notaties en daarmee kwalitatief redeneren

16 en 17 -20 jaar	2- streef	3 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Getallen en getalrelaties – Structuur en samenhang	– soorten getallen, zoals priemgetallen, wortels als irrationale getallen enz. – uitbreiding naar reële getallen	– relatie leggen tussen breuken, decimale notatie en afronden
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– soorten getallen, zoals priemgetallen, wortels als irrationale getallen enz. – uitbreiding naar reële getallen	– kiezen van een oplossingsstrategie, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren op juistheid
	Weten waarom	Weten waarom
	– verband tussen breuken met getallen en met variabelen – decimale getallen als tiendelige breuken	– kennis getalsystemen en hun onderlinge relatie – patronen in getallen herkennen en beschrijven

16 en 17 -20 jaar	2- streef	3 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Berekeningen uitvoeren met gehele getallen, breuken en decimale getallen	– rekenen met breuken	– beheersen van de regels van de rekenkunde, zonder ICT-middelen – berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– rekenen in de wetenschappelijke notatie	– beheersen van de regels van de rekenkunde, zonder ICT-middelen – berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels
	Weten waarom	Weten waarom
	– eigenschappen van bewerkingen – correctheid van rekenkundige redeneringen verifiëren	– correctheid van rekenkundige redeneringen verifiëren

NB 2S omvat de inhouden van 1S, 3S omvat de inhouden van 2S

Voorbeeld 1
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 10 leerling

7] Maak de som af.

980 = ________ x 10 + 80

Voorbeeld 2
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

24] 0,25 + 9,5 = ________

10] 24 000 : 100 = ________

11] 10 x 0,5 = ________

25] 0,8 + 0,7 = ________

26] 10 – 0,45 = ________

Voorbeeld 3
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

6] Alle kinderen van de school mogen kiezen waar ze de laatste schooldag naartoe willen.
De kinderen kiezen als volgt:
Pretpark: $\frac{1}{3}$ deel van de kinderen.
Dierentuin: $\frac{1}{2}$ deel van de kinderen.
Circus: $\frac{1}{6}$ deel van de kinderen.
Waar willen de meeste kinderen naar toe?

Voorbeeld 4
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

5] In de bioscoop zijn 25 rijen met stoelen. In elke rij staan 22 stoelen. Hoeveel stoelen zijn er in totaal?

________ stoelen

Voorbeeld 5
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

1] 6508 + 7089 = ________

2] 4327 + 432 + 43 = ________

Maatschappelijk situaties waarin zichtbaar is hoe kennen, kunnen en inzicht op het gebied van rekenen & wiskunde functioneert zijn lastig te illustreren via (schoolse) opgaven. Ook beslaan dit soort situaties zelden maar een enkel subdomein. Ze kenmerken zich door verbindingen ertussen.
Denk voor dit soort situaties onder andere aan:
Omgaan met geld (schuld, rente, kosten/tijdeenheid); reizen (tijd, geld, afstand); aanschaf en bedienen apparaten (vaste kosten, korting, gebruikskosten, aflezen displays); huis en tuin inrichten en onderhoud (plattegrond, werktekening, schaal, meetinstrumenten, maten, materiaal); voeding en gezondheid (kosten, koken, calorieën, maten, geld); planningen in de tijd.

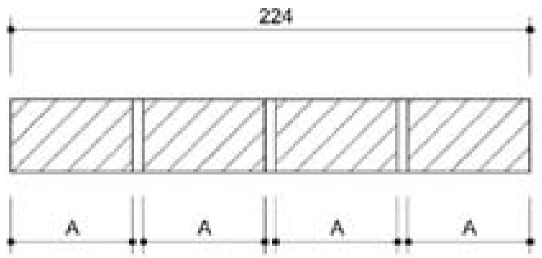
Voorbeeld 6
Bron: CSE Zorg en welzijn-breed vmbo gl 2007 tijdvak 1

12 Mike heeft voor het warm / koud buffet een pastasalade met tomaatjes gemaakt. Mike vindt het een erg lekker gerecht en wil het thuis ook een keer maken. Van de kok krijgt Mike het recept mee. Het recept is voor 18 personen.
→ Reken het recept om naar 3 personen.

Pastasalade met tomaatjes:
- 900 gram pasta
- 18 bosuitjes
- 6 teentjes knoflook
- 600 gram gekruide tahoereepjes
- 12 eetlepels olijfolie
- 12 eetlepels citroensap
- 900 gram kerstomaatjes
- 6 takjes peterselie
- 6 takjes selderij
- zout en peper naar smaak

Voorbeeld 7
Bron: CSE Bouwtechniek-timmeren vmbo bb 2004 tijdvak 1
(aangepast, was meerkeuzevraag)

• 21 De onderstaande afbeelding toont de doorsnede van een geschaafd stuk hout.
Het stuk hout is in vier gelijke stukken geschulpt.
Hoe groot is maat A als de houtbreedte 224 mm is en de zaagsnede 4 mm?



Voorbeeld 8
Bron: CSE Wiskunde vmbo GT 2005 tijdvak 1

BOSLOOP

Een atletiekvereniging heeft een bosloop georganiseerd.
Er zijn drie afstanden uitgezet: 2300 m en 3,5 kilometer voor kinderen en 14 kilometer voor volwassenen.

O 1 Rienk heeft zijn afstand van 2300 m met een gemiddelde snelheid van 3,8 meter per seconde gelopen.
→ Bereken in hele seconden hoe lang Rienk over zijn afstand heeft gedaan. Schrijf je berekening op.

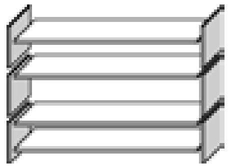
O 2 Op de foto hieronder komt Sibren na 3,5 km over de finish in een tijd van 14 minuten en 15 seconden.

→ Bereken in één decimaal zijn gemiddelde snelheid in meter per seconde. Schrijf je berekening op.

4 O 3 Janneke heeft de afstand van 14 km met een gemiddelde snelheid van 4,5 meter per seconde gelopen.
Bij de start van de bosloop stond de klok op 00:00:00 (uren minuten seconden).
→ Welke tijd stond er op de klok toen Janneke finishte? Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

Voorbeeld 9
Bron: PISA 2003 - in Nederland 70% goed

Boekenrekjes
Om één boekenrekje te maken heeft een timmerman de volgende onderdelen nodig:
4 lange houten planken,
6 korte houten planken,
12 kleine beugels,
2 grote beugels en
14 schroeven.



De timmerman heeft 26 lange houten planken, 33 korte houten planken, 200 kleine beugels, 20 grote beugels en 510 schroeven in voorraad.
Hoeveel volledige boekenrekjes kan de timmerman maken?

Voorbeeld 10
(eigen opgave)

Op de etiketten van flessen sap en limonade staat allerlei informatie. Enkele gegevens van de etiketten op beide flesjes vruchtensap zijn hieronder overgenomen:

Versgeperst sinaasappel-kiwisap
500 ml
Ingrediënten: 80% sinaasappelsap, 20% kiwisap
Voedingswaarde per 100 ml
Energie........................165KJ (39 kcal)
Eiwit...........................1,0 g
Koolhydraten............... ..8,5 g
waarvan suikers..............8,5 g
Vet............................ .0 g
Voedingsvezel................2,0 g

Percentage van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid:
Vitamine C 78%..................47 mg
Een glas versgeperst sinaasappel-kiwisap (150 ml) bevat 59 kcal en 71 mg vitamine C

Versgeperst sinaasappel-mango-passievruchtensap
500 ml
Ingrediënten: 50% sinaasappelsap, 43% mangomoes, 7% passievruchtensap
Voedingswaarde per 100 ml
Energie........................220KJ (52 kcal)
Eiwit...........................0,9 g
Koolhydraten................12 g
waarvan suikers........... 12 g
Vet...............................0 g
Voedingsvezel................3,5 g

Percentage van de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid:
Vitamine C 60%................36 mg
Een glas versgeperst sinaasappel-mangosap (150 ml) bevat 78 kcal en 54 mg vitamine C

Vraag:
a. Hoeveel mg is de aanbevolen dagelijkse hoeveelheid vitamine C?
b. Is die aanbevolen hoeveelheid vitamine C op beide etiketten gelijk?

Voorbeeld 11
Bron: CSE Wiskunde havo A12 2006 tweede tijdvak

Voorraadkosten

FuelMaster produceert benzinepompen, die gebruikt worden door tankstations.
In elke benzinepomp zit een pomp. FuelMaster heeft elk jaar 40 000 pompen nodig voor zijn productie. FuelMaster bestelt zijn pompen bij PumpTech.
De bestelkosten bedragen 0,50 euro per pomp plus 300 euro per bestelling.

3p 13 □ Bereken de jaarlijkse bestelkosten als er 4000 pompen per bestelling geleverd worden.

Voorbeeld 12
Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

25] Rond af op het dichtstbijzijnde gehele getal.

3437,48 → ________

Voorbeeld 13
Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

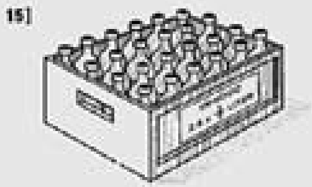
18]

Hoeveel stond er op 1-1-2004 meer op de rekening dan op 1-1-2003?

€ ________

Voorbeeld 14
Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

15]



In een krat staan 24 flesjes van $\frac{1}{3}$ liter.
Hoeveel liter is dat in totaal?

________ liter

Voorbeeld 15
Bron: PPON - goed of bijna goed beheerst door percentiel 75 leerling

22] $1\frac{3}{8} - \frac{7}{8} =$ ________

Voorbeeld 16
Bron: Voorbeeldopgaven REAL-project: "Breuken voor de brugklas"

Invuloefening
Je mag de volgende symbolen gebruiken:
+ (optellen), - (aftrekken), × (vermenigvuldigen), : (delen), = (is gelijk aan), < (is kleiner dan) en > (is groter dan).

$\frac{1}{8} \ldots \frac{1}{9}$ $\qquad$ $\frac{5}{8} \ldots \frac{5}{9} = \frac{5}{72}$

$\frac{1}{a} \ldots \frac{1}{a+1}$ $\qquad$ $\frac{1}{a} \ldots \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$

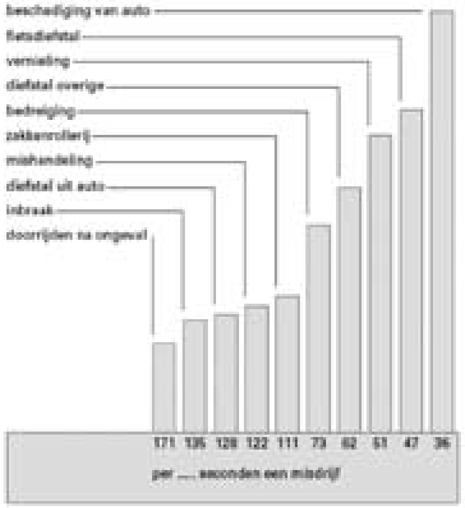
Voorbeeld 17

Bron: CSE Wiskunde havo A12 2001 eerste tijdvak

Opgave 1 Misdrijven

Elk jaar worden in Nederland veel misdrijven gemeld. Deze variëren van het stelen van een chocoladereep tot het plegen van een moord.
Misdrijven worden gemeld bij het Openbaar Ministerie (OM). Het OM beslist dan over de (eventuele) vervolging van de daders.
In figuur 1 vind je informatie over misdrijven die in 1996 werden gemeld.

figuur 1



De getallen langs de horizontale as geven voor elke categorie aan hoeveel seconden er gemiddeld tussen twee opeenvolgende meldingen zitten.
Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat in 1996 in Nederland (gemiddeld) elke 135 seconden een inbraak werd gemeld.
Let op: 1996 was een schrikkeljaar en had dus 366 dagen.

In figuur 1 komt ook de categorie 'fietsdiefstal' voor.

4p 1 □ Toon aan dat er in 1996 ongeveer 670 000 keer een fietsdiefstal werd gemeld.

Voorbeeld 18

Bron: CSE Wiskunde havo A12 2001 eerste tijdvak

Opgave 2 Verwarming

Om een kamer goed te kunnen verwarmen, moet de verwarmingsradiator voldoende capaciteit hebben. Een grote kamer heeft natuurlijk een radiator met een grotere capaciteit nodig dan een kleine kamer.
De verwarmingsinstallateur bepaalt aan de hand van onderstaande tabel hoe groot de capaciteit van een radiator moet zijn. De inhoud van een kamer (vertrek) wordt gegeven in m^3 en de capaciteit van een radiator in Watt.

tabel 1

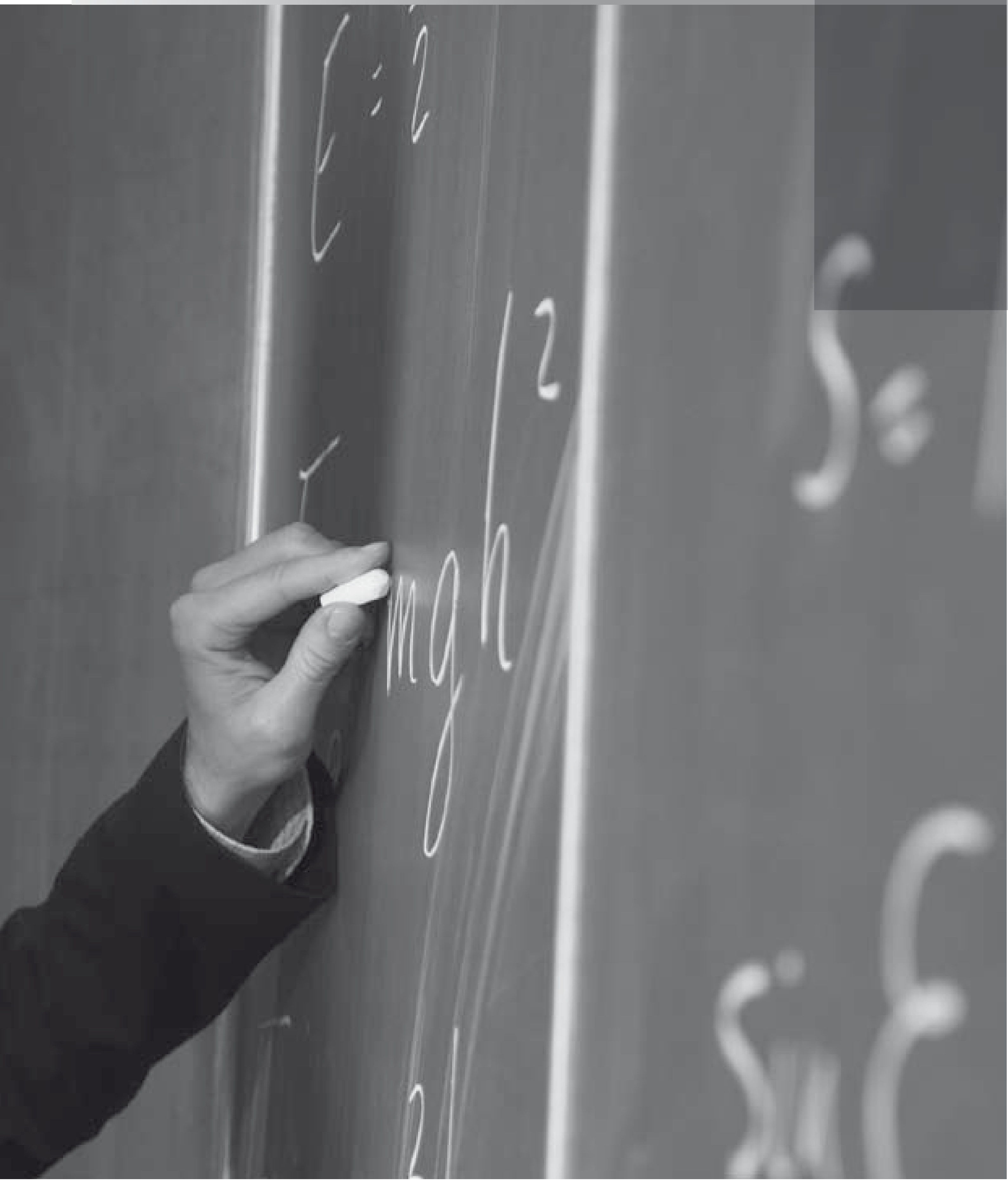
Benodigde capaciteit in Watt per m^3	vertrekken met 1 buitenmuur			vertrekken met 2 buitenmuren			vertrekken met 3 buitenmuren		
	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3
begane grond	70	60	55	85	70	60	100	80	70
1e verdieping	60	55	50	70	60	50	80	70	60
2e verdieping	70	60	55	85	70	60	100	80	70
badkamers	als voor een normaal vertrek, met een toeslag van 20%								

Uit tabel 1 lees je bijvoorbeeld af dat voor een kamer van 40 m^3 op de tweede verdieping met twee buitenmuren een radiator met een capaciteit van $85 \times 40 = 3400$ Watt nodig is.

Iemand heeft nog de oude radiator die geschikt was om de kinderkamer te verwarmen.
Hij vraagt zich af of deze radiator geschikt is voor de vernieuwde badkamer.
De kinderkamer van 30 m^3 was op de begane grond en had één buitenmuur.
De badkamer op de eerste verdieping is wel kleiner, de inhoud is maar 24 m^3, maar er zijn twee buitenmuren. En in een badkamer moet het iets warmer zijn dan in andere vertrekken: volgens tabel 1 is daarvoor 20% extra capaciteit nodig.

5p 6 □ Heeft de oude radiator voldoende capaciteit? Licht je antwoord toe.

'Het vmbo en mbo moeten meer van elkaar weten wat ze met taal en rekenen doen'



8 De operationalisering voor Verhoudingen

8.1 Inleiding

Het gebied *verhoudingen* is gekozen omdat veel toepassingsproblemen (ook binnen de wiskunde) te maken hebben met verhoudingen en omdat het oplossen daarvan kennis, vaardigheden en inzicht vraagt op diverse terreinen van rekenen & wiskunde.

Juist 'verhouding' is een prachtvoorbeeld om zich te realiseren hoe wij –van de wieg af aan- theoretische ervaringen opdoen en vaardigheden ontwikkelen, aanvankelijk onbewust en geleidelijk bewuster.
Hans Freudenthal (1984) Appels en peren/wiskunde en psychologie.

In het verslag van de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) van 2004 (Cito, 2005) wordt het gebied verhoudingen uitgebreid beschreven. Er wordt gesteld dat verhoudingen beschreven kunnen worden:
- in verhoudingentaal, zoals bij 'één op de tien Nederlanders' of 'het aantal fietsers is twee keer zo groot als het aantal automobilisten';
- in breukentaal, bijvoorbeeld 'driekwart van de inwoners is ouder dan 25 jaar';
- met procenten, zoals '70 procent van de mensen is voor de aanleg van een randweg'.

Begrip van verhoudingen houdt in dat de relatie tussen die verschillende beschrijvingen kan worden gelegd en dat leerlingen dit begrip kunnen inzetten bij het oplossen van verhoudingsvraagstukken. Deze zijn in vier hoofdtypen in te delen (Team W12-16,1992)
- het vaststellen van een verhoudingsrelatie
- het vergelijken van verhoudingen
- het maken van gelijkwaardige verhoudingen
- het bepalen van de vierde evenredige

De complexiteit van de verhoudingsproblemen wordt bepaald door diverse factoren zoals: hun verschijningsvorm ('zoveel per zoveel', schaal, samengestelde grootheden, mengsels) in combinatie met de soort en grootte van de gebruikte getallen, directe of indirecte vraagstelling en dergelijke. Hiermee kan onderscheid gemaakt worden tussen de fundamentele en de streefkwaliteit.

Omdat verhoudingen in breukentaal kunnen worden beschreven is in dit gebied ook enige kennis en begrip nodig van breuken[1]. Het gaat hierbij dan met name om onderstaande aspecten:
- de deel – geheel relatie: $\frac{3}{4}$ als 3 van de 4 delen van een geheel ($\frac{3}{4}$ taart);
- de breuk als verhouding, bijvoorbeeld, 3 van de 4 Nederlanders is $\frac{3}{4}$ deel van het aantal Nederlanders.

De relatie tussen verhoudingen en procenten is vanzelfsprekend: een percentage moet worden begrepen als een verhouding of als een vergelijking van twee of meer zaken, waarbij één van de zaken op 100 procent gesteld wordt. Essentiële onderdelen van dit onderwerp zijn:
- inzien dat het geheel 100% is;
- aangeven met behulp van procenten hoe groot een bepaald deel in vergelijking met een geheel is (zowel precies als globaal schattend);
- de relatie tussen procenten enerzijds en verhoudingen, breuken en kommagetallen anderzijds;
- het kunnen gebruiken van percentages in allerlei contexten. Daarbij staan niet alleen centraal het begrip van en de vaardigheid in het rekenen met percentages, maar ook kennis van begrippen en afspraken in bepaalde sectoren. Enkele voorbeelden:
  – BTW, korting, stijging, daling, toename, prijsverlagingen;
  – renteberekeningen;
  – winst en verlies.
- inzien en gebruiken dat het bij procentuele toe- en afname

[1] *Breuken als getallen en bewerkingen met breuken komen bij het gebied 'getallen' aan de orde.*

(exponentiële groei) gaat om rekenen met vermenigvuldigingsfactoren.

In de kerndoelen po komt de verwevenheid van verhoudingen met breuken en procenten ook tot uiting:
26. De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.

In het vo is het domein Verhoudingen van groot belang, zowel vanwege het feit dat dit gebied in het po voor veel leerlingen niet is afgerond, als vanwege de veelheid van toepassingsproblemen waarin verhoudingen een rol spelen. In het vo wordt dit gebied geconsolideerd, onderhouden, en toegepast. Afhankelijk van het schooltype zal ook nog uitbreiding plaatsvinden. In de onderbouw vo hebben de volgende twee kerndoelen betrekking op het gebied verhoudingen:

20. De leerling leert alleen en in samenwerking met anderen in praktische situaties wiskunde te herkennen en te gebruiken om problemen op te lossen.

22. De leerling leert de structuur en de samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, breuken, procenten en verhoudingen, en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties.

Ook in het examenprogramma wiskunde van het vmbo (16 jaar) zijn verhoudingen expliciet opgenomen in de eindtermen van het domein rekenen, meten en schatten:
- verhoudingen vergelijken,
- een verhouding omzetten in een breuk, decimaal getal of percentage,
- bij berekeningen een verhoudingstabel gebruiken.

In het voorgezet onderwijs is kunnen werken met verhoudingen ook van belang in en voor andere vakken, voor vmbo bb en kb (16 jaar) en mbo (17-20 jaar) zijn dat met name de beroepsgerichte vakken. Daar vindt zowel oefening en onderhoud als gebruik plaats.

Verhoudingen worden gevonden in situatiebeschrijvingen, schema's, tabellen, grafieken, plattegronden en kaarten. Maar ook vaak in situaties uit het dagelijks leven, bijvoorbeeld bij het aanpassen van hoeveelheden in recepten aan het aantal personen. De verhoudingentaal sluit aan bij de terminologie zoals die in het dagelijks leven gebruikt wordt.

De voorbeelden hieronder geven een overzicht van hoe en waar verhoudingen zoal voorkomen.

Hoe langer hoe meer (tijdgerelateerd)
- Snelheid
  - kilometer per uur
  - meter per seconde
  - productie per arbeidsuur
- Aanwas of groei
  - bevolkingsaanwas
  - groei van omzet en omzetdaling
  - bacteriegroei (aantal per tijd)
- landaanslibbing (oppervlak per tijd)
- rente in de zin van kapitaalgroei per tijd
- loon op basis van stukprijs, op basis van basisloon en bonus per stuk

Deel van (aantalgerelateerd)
- Deel-geheel bij(grote) aantallen
  - $\frac{3}{4}$ van de leerlingen in de klas gaan mee
  - percentage van het nationaal inkomen dat besteed wordt aan de gezondheidszorg
- Deel-geheel bij mengsels
  - deze chips bevatten 30% vet
  - metaallegeringen op basis van vaste verhoudingen, bv. brons
- Deel-geheel bij grootheden
  - de helft van het oppervlak
  - half zo zwaar
  - druk per m^2

Meetkundige verhoudingen (ruimtelijk)
- Projecties
  - schaal (verhouding 1 : 1000)
  - kopieermachine
  - schaduw
  - plattegrond
- Gelijkvormigheid
  - verhoudingen in een gevel / gezicht /
  - kleding- en schoenmaten
  - A0-A1-A2-A3-A4-A5 papiermaten

Verhoudingen tussen en binnen andere grootheden
- Prijs per ...
  - benzine met de teller voor liters en prijs
  - prijs per 0,75 liter wijn
  - prijs per brood
  - prijs per vierkante meter
  - kilometer-rijden
- Dichtheid
  - bevolkingsdichtheid
- Zakelijke verhoudingen
  - winst in verhouding tot omzet
  - BTW
  - rente
  - korting

Vergroten / verkleinen (niet meetkundig)
- recepten in het kookboek
- bak- / braadtijd per kilo
- mengverhoudingen

8.2 Referentieniveau 1 (12 jaar)

In de *fundamentele kwaliteit* op dit referentieniveau (1F) krijgt het gebied getallen meer aandacht dan het gebied verhoudingen. Dat neemt niet weg dat ook op 1F enige aandacht nodig is voor verhoudingen. Deze aandacht kenmerkt zich door: inzichtelijk met verhoudingen, breuken, procenten, en kommagetallen werken, binnen betekenisvolle contexten, met vertrouwde getallen.

De *streefkwaliteit* van dit niveau (1S) omvat de onderdelen uit de fundamentele kwaliteit (1F) en is ten opzichte hiervan een verdieping van de kennis en vaardigheden. Deze verdieping

'Het probleem is dat rekenvaardigheden na het basisonderwijs niet worden onderhouden'

kenmerkt zich doordat (wiskundig) redeneren, formaliseren en generaliseren ('weten waarom') verweven wordt met de onderdelen die ook op 1F voorkomen. Daarnaast is er sprake van het verleggen van accenten. Zo komen op 1S bijvoorbeeld formele bewerkingen met breuken (in de context van verhoudingen) en het gebruiken van procenten boven de 100 voor.

8.3 Referentieniveau 2 (16 jaar)

De *fundamentele kwaliteit* van het tweede referentieniveau, 2F, is een toespitsing op het gebruiken en toepassen van de kennis en vaardigheden uit 1F. Deze fundamentele kwaliteit (2F) is op te vatten als een basis aan kennen en kunnen van rekenen & wiskunde, waar iedere Nederlander over zou moeten beschikken. Tegelijk is dit een goed startpunt voor toespitsing van (een deel van) deze kennisbasis op het gebruik van rekenen & wiskunde in een beroepssituatie. In veel toepassingssituaties (ook beroepsgerichte) komen verhoudingen voor, vaak ook in de vorm van procenten. Op 2F moet daarmee in toepassingssituaties goed gerekend kunnen worden. In eenvoudige gevallen kan dit met pen en papier (of met het hoofd). Bij lastiger opgaven kan de rekenmachine worden gebruikt. Daarbij moet vooraf (uit het hoofd of op papier) een schatting gemaakt kunnen worden.

De *streefkwaliteit* (2S) op dit referentieniveau bouwt voort op de streefkwaliteit van het eerste referentieniveau (1S). Het is niet zo dat de *streefkwaliteit* (2S) het fundamentele niveau (2F) geheel omvat. In 2F staat het toepassen en gebruiken centraal, hiermee vergeleken gaat het in 2S om verdiepen, formaliseren en generaliseren en soms ook om uitbreiden. Zo komt het rekenen met een groeifactor (exponentiële groei) op 2F niet voor maar op de streefkwaliteit (2S) wel. Het kunnen uitvoeren van bewerkingen met breuken (in de context van verhoudingen) krijgt op 2F niet veel aandacht (meer) omdat dit in het kader van burgerschap en in de dagelijkse – en beroepspraktijk niet vaak wordt toegepast. Dit wordt onderdeel van de streefkwaliteit (2S). Daarentegen komen berekeningen met procenten juist wel veel voor in het kader van burgerschap en in de dagelijkse en beroepspraktijk en zijn die dus onderdeel van de fundamentele kwaliteit (2F). Op 2S zit de verdieping onder meer in het leggen van het verband tussen verhoudingen en meetkunde (schaal, vergroten, gelijkvormigheid).

8.4 Referentieniveau 3 (17-20 jaar)

De *fundamentele kwaliteit* van het derde referentieniveau, 3F, bouwt voort op 2F en wordt bereikt in het mbo (bijvoorbeeld op niveau 3 en 4 opleidingen met weinig rekenen & wiskunde). Voor het gebied verhoudingen gaat het dan met name om onderhouden, consolideren en gebruiken van eerder verworden inzichten, kennis en vaardigheden. De situaties waarin met verhoudingen moet worden gewerkt kunnen iets complexer zijn dan bij 2F, maar zullen met name voortkomen uit het 'burgerschapsgebied' en uit eenvoudige toepassingen binnen het beroep.

Voor de *streefkwaliteit* van het derde referentieniveau (3S), die voortbouwt op 2S, moeten we denken aan leerlingen op de havo met wiskunde A. Ook daar gaat het vooral om consolidatie en gebruik in toepassingssituaties die complex van aard kunnen zijn. Inzicht in het verschil tussen relatief en absoluut vergelijken hoort thuis in 3S. Verdieping vindt plaats door een relatie te leggen tussen (rekenen met) verhoudingen en de algebra (functies) en daar bijvoorbeeld verhoudingen en evenredige verbanden aan elkaar te relateren.

8.5 Concretisering

In de tabel op de volgende pagina's wordt het gebied verhoudingen geconcretiseerd. De inhoud op het gebied van verhoudingen wordt beschreven voor elk van de drie referentieniveaus en daarbinnen steeds voor de fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteit naast elkaar.
Daarbij is sprake van een getrapte indeling, als eerste in:
1. Notatie, taal en betekenis
   Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties
   Wiskundetaal gebruiken
2. Met elkaar in verband brengen
   Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen
3. Gebruiken
   In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en breuken

Daarbinnen is steeds het soort 'weten' omschreven, we onderscheiden drie soorten:
- *Paraat hebben:* kennis van feiten en begrippen, reproduceren, routines, technieken
- *Functioneel gebruiken:* probleemaanpak, toepassen, gebruiken, onderzoeksvaardigheden
- *Weten waarom:* begrijpen, principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht

Na de tabel zijn voorbeeldopgaven opgenomen om een beeld te geven van de beschreven inhouden en niveaus.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– een vijfde deel van alle Nederlanders korter schrijven als $\frac{1}{5}$ 'deel van ...' – 3,5 is 3 en $\frac{5}{10}$ – '1 op de 4' is 25% of 'een kwart van' – geheel is 100%	– schrijfwijze $\frac{1}{4} \times 260$ of $\frac{260}{4}$ – formele schrijfwijze 1 : 100 ('staat tot') herkennen en gebruiken – verschillende schrijfwijzen (symbolen, woorden) met elkaar in verband brengen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– notatie van breuken (horizontale breukstreep), decimale getallen (kommagetal) en procenten (%) herkennen – taal van verhoudingen (per, op, van de) – verhoudingen herkennen in verschillende dagelijkse situaties (recepten, snelheid, vergroten/verkleinen, schaal enz.)	– schaal
	Weten waarom	Weten waarom
		– relatieve vergelijking (term niet)

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	– eenvoudige relaties herkennen, bijvoorbeeld dat 50% nemen hetzelfde is als 'de helft nemen' of hetzelfde als 'delen door 2'	– procenten als decimale getallen (honderdsten) – veel voorkomende omzettingen van percentages in breuken en omgekeerd
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– beschrijven van een deel van een geheel met een breuk – breuken met noemer 2, 4, 10 omzetten in bijbehorende percentages – eenvoudige verhoudingen in procenten omzetten bijv. 40 op de 400	– breuken en procenten in elkaar omzetten – breuken benaderen als eindige decimale getallen – verhoudingen en breuken met een rekenmachine omzetten in een (afgerond) kommagetal
	Weten waarom	Weten waarom
		– relatie tussen breuken, verhoudingen en percentages – breuken omzetten in een kommagetal, eindig of oneindig aantal decimalen

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en verhoudingen	– rekenen met eenvoudige percentages (10%, 50%, ...)	– rekenen met percentages ook met moeilijker getallen en minder 'mooie' percentages (eventueel met de rekenmachine)
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– eenvoudige verhoudingsproblemen (met mooie getallen) oplossen – problemen oplossen waarin de relatie niet direct te leggen is: 6 pakken voor 18 euro, voor 5 pakken betaal je dan ...	– gebruik dat 'geheel' 100% is – ontbrekende afmeting bepalen van een foto die vergroot wordt – rekenen met eenvoudige schaal
	Weten waarom	Weten waarom
	– eenvoudige verhoudingen met elkaar vergelijken: 1 op de 3 kinderen gaat deze vakantie naar het buitenland. Is dat meer of minder dan de helft?	– vergroting als toepassing van verhoudingen – bij procenten mag je niet zomaar optellen en aftrekken (10% erbij 10% eraf) – betekenis van percentages boven de 100 – relatieve grootte: de helft van iets kan minder zijn dan een kwart van iets anders

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In verschillende 'cellen' zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	– een 'kwart van 260 leerlingen' kan worden geschreven als '$\frac{1}{4} \times 260$' of als '$\frac{260}{4}$' – formele schrijfwijze 1 : 100 bij schaal herkennen – 1 op de 5 Nederlanders is hetzelfde als 'een vijfde deel van alle Nederlanders'	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– notatie van breuken, decimale getallen en procenten herkennen en gebruiken	– verschillende schrijfwijzen met elkaar in verband brengen – adequate taal en notaties gebruiken bij het oplossen van problemen waarin verhoudingen een rol spelen (vaak binnen de gekozen beroepsopleiding)
	Weten waarom	Weten waarom

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	– eenvoudige stambreuken ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, ...), decimale getallen (€ 0,50; € 0,25; € 0,10), percentages (50%, 25%, 10%) en verhoudingen (1 op de 2, 1 op de 4, 1 op de 10) in elkaar omzetten	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– met een rekenmachine breuken en procenten berekenen of benaderen als eindige decimale getallen	– een passend rekenmodel kiezen of een rekenmachine op een goede manier gebruiken bij het in elkaar omzetten van breuken, decimale getallen en procenten
	Weten waarom	Weten waarom

NB. 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en verhoudingen	– rekenen met samengestelde grootheden (km/u, m/s en dergelijke): Een auto rijdt 50 km/u. Welke afstand wordt in 2 seconden afgelegd? – bepalen op welke (eenvoudige) schaal iets getekend is, als enkele maten gegeven zijn – uitvoeren procentberekeningen: Inkoopprijs is € 75,-. Wat wordt de prijs inclusief btw? – verhoudingen met elkaar vergelijken en daartoe een passend rekenmodel kiezen, bijvoorbeeld verhoudingstabel: Welk sap bevat naar verhouding meer vitamine C?	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– vergroting als toepassing van verhoudingen: Een foto wordt met een kopieermachine 50% vergroot. Hoe veranderen lengte en breedte van de foto?	– succesvolle strategie hebben om verhoudingsprobleem aan te pakken – omzetten naar standaard verhouding; 344 auto's per 1000 inwoners is ongeveer 1 per …. – rekenen met schaal en bepalen op welke schaal iets getekend is
	Weten waarom	Weten waarom
	– Waarom mag je soms percentages bij elkaar optellen bij berekeningen?	

NB. 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken		– omgekeerd evenredig
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– adequate (wiskunde)taal en notaties lezen en gebruiken. Ook de notatie 3 : 5 voor 'drie van de vijf leerlingen'	– verhouding relateren aan lineair verband
	Weten waarom	Weten waarom
	– gebruik maken van de begrippen *absoluut* en *relatief* bij het rekenen met procenten	

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	– breuken, decimale getallen, percentages en verhoudingen in elkaar omzetten	– omgekeerd evenredig
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– weten wat 'in verhouding hetzelfde' betekent en hiermee rekenen, bijvoorbeeld 'in dezelfde verhouding vergroten'	– verhoudingen, breuken, decimale getallen en procenten met elkaar in verband brengen in andere domeinen
	Weten waarom	Weten waarom
	– kennis van getalsystemen: $\frac{1}{4}$ kan wel als eindig decimaal getal geschreven worden en $\frac{1}{3}$ niet	– uitbreiding kennis van getalsystemen

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en verhoudingen	– formele rekenregels hanteren – bepalen op welke schaal iets getekend is	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– rekenen met percentages boven de 100 – vierde evenredige berekenen – verhoudingen toepassen bij het oplossen van problemen – berekeningen met een groeifactor / vermenigvuldigingsfactor of percentage uitvoeren bijvoorbeeld samengestelde interest en exponentiële groei; of bij: 19% erbij en 25% eraf – verhoudingen in de meetkunde gebruiken	
	Weten waarom	Weten waarom
	– (wiskundig) redeneren in situaties waarin percentages of verhoudingen voorkomen	– relatie leggen met verhoudingen binnen algebra en meetkunde – (wiskundig) redeneren in situaties waarin percentages of verhoudingen voorkomen

NB. 2S omvat de inhouden van 1S, 3S omvat de inhouden van 2S

Voorbeeld 1
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 10 leerling

3] Patrick koopt een trui van € 90,– en krijgt 50% korting.
Hoeveel moet hij betalen?

€ ______

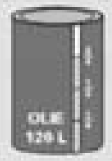
Voorbeeld 2
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

5] $\frac{3}{10}$ deel van de fietsen bleek bij een fietsenkeuring niet in orde.
Hoeveel procent is dat?

______ %

Voorbeeld 3
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

8]



Het buisje laat zien dat de tank nog voor $\frac{3}{4}$ deel gevuld is.
Hoeveel olie zit er nog in deze tank?

______ liter

Voorbeeld 4
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

15]

Slechts 1 op de 10 mensen waren tegen.
Hoeveel mensen stemden tegen?

______ mensen

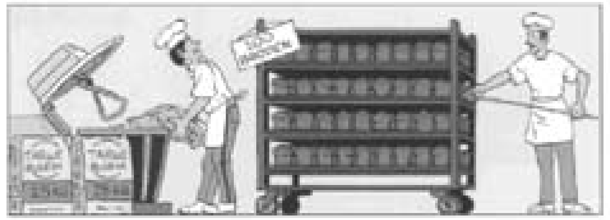
Voorbeeld 5
Bron: PPON - goed beheerst door p ercentiel 75 leerlingen

Jenny heeft 20 van de 25 vragen goed beantwoord.
Hoeveel procent is dat?

______ %

Voorbeeld 6
Bron: CSE Landbouw-breed vmbo BB 2004 eerste tijdvak

Tarwe, door de boer geteeld, wordt in de fabriek verwerkt tot bloem. De bakker verwerkt de bloem tot brood.



100 kg tarwe → 75 kg bloem → 100 broden

Hoeveel kilogram bloem is nodig voor 60 broden?
Schrijf de berekening op.

Voorbeeld 7
Bron: CSE Wiskunde vmbo GL/TL 2007 tijdvak 2

Spaarrekening

Om klanten te winnen, bieden banken soms een spaarrekening met een gunstige rente aan. Het kan voor een klant dus heel verstandig zijn om de verschillende spaarrekeningen te bekijken voordat hij/zij een spaarrekening opent.

Inge krijgt voor haar 12de verjaardag € 1000,- van haar opa en oma. Ze moet het geld wel tot haar 18de verjaardag op de bank laten staan. Samen met haar vader zoekt ze uit bij welke spaarrekening zij op haar 18de verjaardag het meeste geld krijgt.

Bij de **SPAARBEWUSTBANK** krijg je jaarlijks 4% rente als je het minstens 6 jaar vast laat staan.

Bij de **BESTE BANK** krijg je het 1e jaar 3% rente. Elk jaar dat je het langer op de bank laat staan, krijg je 0,25% rente meer. Dus het 2de jaar 3,25% rente, het 3de jaar 3,5% rente, enzovoort tot een maximum van 6% rente.

Bij beide banken wordt elk jaar de rente bijgeschreven.

18 Laat met een berekening zien dat Inge bij de SPAARBEWUSTBANK meer dan € 1250,- op haar 18de verjaardag zou krijgen. Schrijf je berekening op.

Voorbeeld 8
bron: CSE Nask 1 vmbo KB 2007 tweede tijdvak

Vlak bij Arnhem vaart een veerbootje heen en weer over de Rijn.
Zie de foto hieronder.

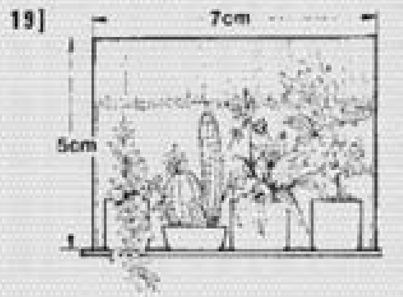
Op het dak bevinden zich 32 zonnepanelen. Elk zonnepaneel heeft een oppervlak van 1,0 m^2 en neemt bij zonnig weer een vermogen op van 1,2 kW. De zonnepanelen samen leveren een elektrisch vermogen van 6,0 kW.

17 Bereken hoeveel procent van de invallende energie nuttig gebruikt wordt.

18 Op een bewolkte en koude dag wordt slechts ¼ van het vermogen geleverd. De motoren van het bootje hebben 3,5 kW nodig om te kunnen werken.
→ Laat zien of het bootje dan voldoende vermogen van de zonnepanelen krijgt om te kunnen varen.

Voorbeeld 10
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 75 leerling

19]



Dit raam is op schaal getekend.
Het raam is in werkelijkheid 210 cm breed.
Hoeveel cm is de hoogte in werkelijkheid?

Voorbeeld 9
Bron: Opgavenset Kees Buijs

1 : 5 = $\frac{3}{8}$ 2 : 5 = 0,4 3 : 8 =

0,7 1 : 8 = $\frac{7}{10}$ 7 : 10 = $\frac{1}{5}$

0,375 $\frac{2}{5}$ 0,2 0,125 $\frac{1}{8}$

Welke deling, breuk en kommagetal horen bij elkaar?

Voorbeeldopgaven Verhoudingen - 2S

Voorbeeld 11
(eigen voorbeeld)

Bakker Bart heeft de prijs van zijn koekjes verhoogd met 10%. Na een poos merkt hij dat er nu minder koekjes worden verkocht, dus verlaagt hij de prijs weer met 10%. Kosten de koekjes nu evenveel als voor de prijsverhoging? Leg je antwoord uit.

Voorbeeldopgaven Verhoudingen - 3S

Voorbeeld 12
Bron: CSE Wiskunde havo A12 2001 tijdvak 1

Opgave 1 Misdrijven

Elk jaar worden in Nederland veel misdrijven gemeld. Deze variëren van het stelen van een chocoladereep tot het plegen van een moord.
Misdrijven worden gemeld bij het Openbaar Ministerie (OM). Het OM beslist dan over de (eventuele) vervolging van de daders.

Bij veel gemelde misdrijven is er geen verdachte aangewezen. Is er geen verdachte, dan komt er ook geen strafzaak.
In 1996 werden er door het OM 242.100 strafzaken afgehandeld. In figuur 2 vind je informatie over de manier waarop die afhandeling plaatsvond.

figuur 2 Afhandeling strafzaken in 1996

<table>
<tr><td colspan="4">Strafzaken
242.100</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vonnissen in de rechtzaal
132.500</td><td colspan="2">Afhandeling door het OM zelf
109.600</td></tr>
<tr><td>Schuldig
123.200</td><td>Niet Schuldig
9.300</td><td>Transactie door geldboete
62.200
(Hierbij legt het OM zelf een geldboete op.)</td><td>Sepot
47.700
(Hierbij is er geen rechtszaak en ook geen geldboete.)</td></tr>
<tr><td>Geldboete 39%
Celstraf 35%
Taakstraf 15%
Ontzegging rijbevoegdheid 11%</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

4p 4 Bereken hoeveel procent van alle 242.100 strafzaken tot een geldboete leidde.

Het aantal strafzaken dat het OM met een transactie afhandelt. groet elk jaar fors.
In 1990 werden 50.000 strafzaken met een transactie afgehandeld. In 1996 waren dat er al 62.200.
Neem aan dat het aantal strafzaken dat met een transactie werd afgehandeld elk jaar met hetzelfde percentage groeide.

5 Bereken dit percentage.

‘Het is goed dat er ook is beschreven wat je in de maatschappij nodig hebt’

9 Operationalisering voor Meten en Meetkunde

9.1 Inleiding

Het conceptuele netwerk rond *Meten en Meetkunde* wordt voor een deel ontwikkeld in het basisonderwijs (po). Het gaat daar om de basiskennis en begrip. Meten krijgt in het po meer aandacht dan meetkunde. Het meten raakt ook meer aan getallen en verhoudingen, dan dat meetkunde dat doet. Meten is immers wat we doen als we verschijnselen in de werkelijkheid kwantificeren. Als we die verschijnselen beschrijven en greep willen krijgen op de ruimtelijke aspecten van de werkelijkheid dan zijn we bezig met meetkunde (TAL-team, 2007). Het zal duidelijk zijn dat meten en meetkunde nauw samenhangen: beide gaan over greep krijgen op de werkelijkheid om ons heen.

Het conceptueel netwerk rond meetkunde kent verschillende onderdelen. Deze zijn te typeren in de volgende drie gebieden (TAL-team, 2007):
• oriëntatie in de ruimte,
• vlakke en ruimtelijke figuren,
• visualiseren en representeren.
Bij dit laatste gebied hoort ook het construeren. De meetkunde over vormen en figuren en ruimte (twee- en driedimensionaal) krijgt juist in het vo veel aandacht. Daarbij komt een vierde gebied namelijk rekenen in de meetkunde (team-W12-16,1992) dat verwant is aan het gebied meten. Naast oppervlakte en inhoud hoort hierbij onder andere het rekenen met hoeken, de tangens (als verhouding en maat voor de steilheid), de stelling van Pythagoras (bijv. om lengtes te berekenen), rekenen met gelijkvormigheid etc..
In alledaagse situaties en in veel beroepen zijn kennis en vaardigheden op het gebied van meten (schalen aflezen, omrekenen veelvoorkomende maten) en meetkunde (oriënteren, plattegronden en kaarten lezen, alledaagse meetkundige begrippen gebruiken) nodig. In toepassingen gaat het bij meten en meetkunde meestal om een combinatie van kennis, begrip en vaardigheden op alle genoemde gebieden.
In het vmbo en mbo wordt met name in de sector techniek veel meetkunde gebruikt. Een groot deel van deze meetkunde, als subdomein van de wiskunde, valt buiten deze domeinbeschrijving. In de bovenbouw van havo/vwo vormt de meetkunde alleen een onderdeel van wiskunde B en valt daarmee buiten deze domeinbeschrijving.

9.2 Referentieniveau 1 (12 jaar)

Het domein meten en meetkunde lijkt momenteel in het po onderbelicht te blijven. Tevens is het een complex domein waarin veel bij elkaar komt, wat ordening en overzicht lastig maken. In de kerndoelen po hebben de volgende twee doelen betrekking op meetkunde respectievelijk meten:

32 De leerlingen leren eenvoudige meetkundige problemen op te lossen.

33 De leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten, zoals bij tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, snelheid en temperatuur.

Deze kerndoelen zijn nader uitgewerkt in diverse publicaties (TAL en TULE) en in de methoden voor rekenen & wiskunde. PPON onderscheidt in het gebied Meten, Meetkunde, Tijd en Geld acht onderdelen. Bij meten zijn dat: lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht en toepassingen. Bij al die onderwerpen gaat het steeds om basiskennis en begrip van de grootheid en van de maten (in eenheden), om het uitvoeren van herleidingen en het kunnen toepassen van deze kennis en inzichten in tal van situaties. Daarnaast zijn er de gebieden tijd en geld en meetkunde.

De *fundamentele kwaliteit* op dit referentieniveau (1F) beschrijft het minimum dat beheerst zou moeten worden op dit gebied aan het eind van de basisschool. De resultaten van PPON 2004 lieten een onvoldoende beheersing op dit terrein zien. Voor de fundamentele kwaliteit op dit niveau beschrijven we doelen die wenselijk zijn en houden daarbij rekening met de haalbaarheid. Voor de fundamentele kwaliteit beperken we ons wat het omrekenen betreft (een moeilijk onderdeel voor veel leerlingen) tot de veelvoorkomende maateenheden en bijbehorende

omrekeningen. Verder is een goed begrip van alledaagse meetkundige begrippen, aflezen van veelvoorkomende meetinstrumenten en voldoende beheersing van omgaan met tijd en geld van belang. We houden rekening met het feit dat een aantal onderwerpen, zoals oppervlakte, inhoud en meetkunde in 2D en 3D, (opnieuw) aandacht krijgt in het voortgezet onderwijs, en dus ook op de fundamentele kwaliteit van het tweede referentieniveau met 16 jaar (2F) geplaatst kan worden.
Op dit referentieniveau omvat de *streefkwaliteit* 1S alles dat genoemd is voor de fundamentele kwaliteit 1F en is daar een verdieping van en soms een uitbreiding op. Voor de streef-kwaliteit 1S is overzicht over het metriek stelsel belangrijk en komen daar ook minder gebruikelijk maten zoals decameter, decaliter en hectoliter aan bod. We stellen verder als doel meer begrip van het omzetten, waarbij omzettingen van klein naar groot (bijvoorbeeld m naar km) en daarbij goed omgaan met decimale getallen, beheerst moet worden.

9.3 Referentieniveau 2 (16 jaar)

In de kerndoelen onderbouw vo staat het volgende over meten en meetkunde:

24. De leerling leert meten, leert structuur en samenhang doorzien van het metrieke stelsel, en leert rekenen met maten voor grootheden die gangbaar zijn in relevante toepassingen.

26. De leerling leert te werken met platte en ruimtelijke vormen en structuren, leert daarvan afbeeldingen te maken en deze te interpreteren, en leert met hun eigenschappen en afmetingen te rekenen en te redeneren.

Het examenprogramma wiskunde voor het vmbo voegt daar de volgende eindterm aan toe:

De kandidaat kan voorstellingen maken, onderzoeken en interpreteren van objecten en hun plaats in de ruimte, en daarbij:
• redeneren over meetkundige figuren en deze tekenen,
• afmetingen meten, schatten en berekenen,
• meetkundige begrippen (en formules –niet voor vmbo bb) , instrumenten en apparaten hanteren.

De *fundamentele kwaliteit* van het tweede referentieniveau, 2F, is gericht op het gebruiken en toepassen van kennis, vaardigheden en inzicht ontwikkeld in de fundamentele kwaliteit van het eerste referentieniveau (1F). De fundamentele kwaliteit 2F is op te vatten als een basis aan kennen en kunnen op het gebied van meten en meetkunde, waar iedere Nederlander over zou moeten beschikken. Daarbij hoort natuurlijk omgaan met tijd en geld, oriënteren (plaats en route interpreteren en maken), meten en dus kennis van maten. Ook een netwerk aan referentiematen opbouwen en maten aflezen (van meetinstrumenten), in praktische situaties maten omrekenen en eenvoudige (werk)tekeningen aflezen (plattegrond, kaart, werktekening doe-het-zelf-pakket etc.) komen aan de orde. Kennis, inzicht en vaardigheden op het gebied van meten en meetkunde komen in veel maatschappelijke situaties en beroepssituaties voor: vervoer, onderhoud huis en tuin, planning in de tijd maken, routebeschrijvingen opvolgen en geven etc.
De *streefkwaliteit* (2S) op dit referentieniveau bouwt voort op de streefkwaliteit van het eerste referentieniveau (1S). Het is niet zo dat de streefkwaliteit (2S) de fundamentele kwaliteit (2F) geheel omvat. In 2F staat het toepassen en gebruiken centraal. Hiermee vergeleken gaat het in 2S om verdiepen, formaliseren en generaliseren en soms ook om uitbreiden. De streefkwaliteit van dit referentieniveau (2S) richt zich daarom meer op het doorzien van het systeem van meten en maten en op een verdieping en uitbreiding van het gebied meetkunde als subdomein van de wiskunde.

9.4 Referentieniveau 3 (17-20 jaar)

Op dit referentieniveau zijn de verschillen tussen de te onderscheiden groepen leerlingen groot. Voor sommige groepen komt er op het gebied van meten en meetkunde niets meer bij en is er nauwelijks sprake van toepassing in beroepsspecifieke situaties (denk aan een opleiding in de richting administratie op het mbo). Er is dan beperkt sprake van consolidatie en onderhoud van kennis en vaardigheden uit 2F. Voor andere groepen zijn er juist veel beroepsspecifieke toepassingen (mbo sector techniek) en weer andere groepen gaan verder met de meetkunde, als wiskundig domein (havo/vwo wiskunde B12). Daardoor is er geen gemeenschappelijk minimumniveau anders dan het in 2F beschreven niveau dat voldoende is voor burgerschap.
Daarna is er sprake van differentiële doelen. Om die reden zijn voor dit referentieniveau geen nadere uitwerkingen van doelen beschreven.

9.5 Concretisering

In de tabel op de volgende pagina's wordt het gebied meetkunde en meten geconcretiseerd. De inhoud op het gebied van meetkunde en meten wordt beschreven voor elk van de drie referentieniveaus en daarbinnen steeds voor de fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteit naast elkaar.
Daarbij is sprake van een getrapte indeling, als eerste in:
1. Notatie, taal en betekenis
- Maten voor lengte, oppervlakte, inhoud, massa en gewicht
- Tijd en geld
- Meetinstrumenten
- Schrijfwijze en betekenis van meetkundige symbolen en relaties
2. Met elkaar in verband brengen
- Meetinstrumenten gebruiken
- Structuur en samenhang tussen maateenheden
- Verschillende representaties, 2D en 3D
3. Gebruiken
- Meten
- Rekenen in de meetkunde

Daarbinnen is steeds het soort 'weten' omschreven, we onderscheiden drie soorten:
• *Paraat hebben:* kennis van feiten en begrippen, reproduceren, routines, technieken.
• *Functioneel gebruiken:* probleemaanpak, toepassen, gebruiken, onderzoeksvaardigheden
• *Weten waarom:* begrijpen, principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht

Na de tabel zijn voorbeeldopgaven opgenomen om een beeld te geven van de beschreven inhouden en niveaus.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Maten voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht, temperatuur – Tijd en geld – Meetinstrumenten – Schrijfwijze en betekenis van meetkundige symbolen en relaties	– uitspraak en notatie van • (euro)bedragen • tijd (analoog en digitaal) • kalender, datum (23-11-2007) • lengte- oppervlakte – en inhoudsmaten • gewicht • temperatuur – omtrek, oppervlakte en inhoud – namen van enkele vlakke en ruimtelijke figuren, zoals rechthoek, vierkant, cirkel, kubus, bol – veelgebruikte meetkundige begrippen zoals (rond, recht, vierkant, midden, horizontaal etc.)	– are, hectare – ton (1000 kg) – betekenis van voorvoegsels zoals milli-, centi-, kilo- – standaard) oppervlaktematen km^2, m^2, dm^2, cm^2 – (standaard) inhoudsmaten m^3, dm^3, cm^3
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– meetinstrumenten aflezen en uitkomst noteren; liniaal, maatbeker, weegschaal, thermometer etc. – verschillende tijdseenheden (uur, minuut, seconde; eeuw, jaar, maand) – aantal standaard referentiematen gebruiken ('een grote stap is ongeveer een meter', in een standaard melkpak zit 1 liter) – eenvoudige routebeschrijving (linksaf, rechtsaf)	– gegevens van meetinstrumenten interpreteren; 23,5 op een kilometerteller betekent..... – aanduidingen op windroos (N, NO, O, ZO, Z, ZW, W, NW) – alledaagse taal herkennen ('een kuub zand') – een hectare is ongeveer 2 voetbalvelden
	Weten waarom	Weten waarom
	– eigen referentiematen ontwikkelen, ('in 1 kg appels zitten ongeveer 5 appels') – een vierkante meter hoeft geen vierkant te zijn – betekenis van voorvoegsels zoals 'kubieke'	– oppervlakte- en inhoudsmaten relateren aan bijbehorende lengtematen – redeneren welke maat in welke context past – spiegelen in 2D en 3D – redeneren over symmetrische figuren – meetkundige patronen voortzetten (hoe weet je wat het volgende figuur uit de rij moet zijn)

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Meetinstrumenten gebruiken – Structuur en samenhang tussen maateenheden – Verschillende representaties, 2D en 3D	– 1dm³ = 1 liter = 1000 ml – een 2D representatie van een 3D object zoals foto, plattegrond, landkaart (incl. legenda), patroontekening	– 1 m³ = 1000 liter – 1 km² = 1000 000 m² = 100 ha
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– in betekenisvolle situaties samenhang tussen enkele (standaard)maten • km → m • m → dm, cm, mm • l → dl, cl, ml • kg → g, mg – tijd (maanden, weken, dagen in een jaar, uren, minuten, seconden) – afmetingen bepalen met behulp van afpassen, schaal, rekenen – maten vergelijken en ordenen	– samenhang tussen (standaard)maten ook door terugrekenen, in complexere situaties en ook met decimale getallen 'Is 1750 g meer of minder dan 1,7 kg?' – samengestelde grootheden gebruiken en interpreteren, zoals km/u – kiezen van de juiste maateenheid bij een situatie of berekening
	Weten waarom	Weten waarom
	– (lengte)maten en geld in verband brengen met decimale getallen: – 1,65 m is 1 meter en 65 centimeter – € 1,65 is 1 euro en 65 eurocent	– decimale structuur van het metriek stelsel – structuur en samenhang metrieke stelsel – relatie tussen 3D ruimtelijke figuren en bijbehorende bouwplaten

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Meten – Rekenen in de meetkunde	– schattingen maken over afmetingen en hoeveelheden – oppervlakte benaderen via rooster – omtrek en oppervlakte berekenen van rechthoekige figuren – routes beschrijven en lezen op een kaart met behulp van een rooster	– omtrek en oppervlakte bepalen/berekenen van figuren (ook niet rechthoekige) via (globaal) rekenen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– veel voorkomende maateenheden omrekenen – liniaal en andere veelvoorkomen meetinstrumenten gebruiken	– formules gebruiken bij berekenen van oppervlakte en inhoud van eenvoudige figuren
	Weten waarom	Weten waarom
		– formules voor het berekenen van oppervlakte en inhoud verklaren – beredeneren welke vergrotingsfactor nodig is om de ene (eenvoudige) figuur uit de andere te vormen – verschillende omtrek mogelijk bij gelijkblijvende oppervlakte

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In verschillende 'cellen' zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	
– Maten voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht, temperatuur – Tijd en geld – Meetinstrumenten – Schrijfwijze en betekenis van meetkundige symbolen en relaties	– 1 ton is 1000 kg; 1 ton is € 100.000 – voorvoegsels van maten megabyte, gigagbyte – symbool voor rechte hoek evenwijdig, loodrecht, haaks bouwtekening lezen, tuininrichting – namen vlakke figuren: vierkant, ruit, parallellogram, rechthoek, cirkel – namen van ruimtelijke figuren cilinder, piramide, bol een schoorsteen heeft ongeveer de vorm van een cilinder	Niet aangegeven, geen gemeenschappelijk niveau vanwege differentiële leerdoelen.
	Functioneel gebruiken	
	– allerlei schalen (ook in beroepsituaties) aflezen en interpreteren kilometerteller, weegschaal, duimstok – situaties beschrijven met woorden, door middel van meetkundige figuren, met coördinaten, via (wind)richting, hoeken en afstanden; routebeschrijving geven, locatie in magazijn opgeven, vorm gebouw beschrijven – eenvoudige werktekeningen interpreteren; montagetekening kast plattegrond eigen huis	
	Weten waarom	

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	
– Meetinstrumenten gebruiken – Structuur en samenhang tussen maateenheden – Verschillende representaties, 2D en 3D	– structuur en samenhang belangrijke maten uit metriek stelsel – interpreteren en bewerken van 2D representaties van 3D objecten en andersom (aanzichten, uitslagen, doorsneden, kijklijnen)	Niet aangegeven, geen gemeenschappelijk niveau vanwege differentiële leerdoelen.
	Functioneel gebruiken	
	– aflezen van maten uit een (werk)tekening, plattegrond werktekening eigen tuin – samenhang tussen omtrek, oppervlakte en inhoud hoe verandert de inhoud van een doos als alleen de lengte wordt gewijzigd, als alle maten evenveel vergroot worden? – tekenen van figuren en maken van (werk)tekeningen en daarbij passer, liniaal en geodriehoek gebruiken	
	Weten waarom	
	– uit voorstellingen en beschrijvingen conclusies trekken over objecten en hun plaats in de ruimte hoe ziet een gebouw eruit? samenhang tussen straal *r* en diameter *d* van een cirkel (in sommige beroepen wordt vooral met diameter (doorsnede) gewerkt)	

NB 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
C Gebruiken	Paraat hebben	
– Meten – Rekenen in de meetkunde	– schattingen en metingen doen van hoeken, lengten en oppervlakten van objecten in de ruimte een etage in een flatgebouw is ongeveer 3 m hoog – oppervlakte en omtrek van enkele 2D figuren berekenen, eventueel met gegeven formule en rond terras voor 4 personen moet minstens diameter 3 m hebben. Is een terras van 9 m^2 geschikt? – inhoud berekenen	Niet aangegeven, geen gemeenschappelijk niveau vanwege differentiële leerdoelen.
	Functioneel gebruiken	
	– juiste maat kiezen in gegeven context Zand koop je per 'kuub' (m^3), melk per liter.	
	Weten waarom	Weten waarom
	– redeneren op basis van symmetrie (regelmatige patronen) randen, versieringen – eigenschappen van 2D figuren	

NB. 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F.

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	
– Maten voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht, temperatuur – Tijd en geld – Meetinstrumenten – Schrijfwijze en betekenis van meetkundige symbolen en relaties	– voorvoegsels bij maten – gebruik van symbolen zoals ≈, Δ, // – parallel – namen van vlakke en ruimtelijke figuren	Niet aangegeven, geen gemeenschappelijk niveau vanwege differentiële leerdoelen.
	Functioneel gebruiken	
	– lezen en interpreteren van tekeningen	
	Weten waarom	
	– gegevens nodig voor het construeren van tekeningen – redeneren over gelijkvormige figuren	

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	
– Meetinstrumenten gebruiken – Structuur en samenhang tussen maateenheden – Verschillende representaties, 2D en 3D	– verschillende soorten symmetrie herkennen en gebruiken	Niet aangegeven, geen gemeenschappelijk niveau vanwege differentiële leerdoelen.
	Functioneel gebruiken	
	– uitspraken doen over orde van grootte en nauwkeurigheid van meetresultaten	
	Weten waarom	
	– structuur en samenhang metrieke stelsel (uitgebreid) – oppervlakte en inhoud van gelijkvormige figuren	

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	
– Meten – Rekenen in de meetkunde	– grootte van hoeken en afstanden berekenen in 2D en 3D figuren – stelling van Pythagoras – goniometrische verhoudingen sin, cos en tan	Niet aangegeven, geen gemeenschappelijk niveau vanwege differentiële leerdoelen.
	Functioneel gebruiken	
	– kennis van figuren en hun eigenschappen gebruiken bij het oplossen van problemen	
	Weten waarom	
	– regelmaat in meetkundige patronen herkennen en beschrijven	

NB. 2S omvat de inhouden van 1S, 3S omvat de inhouden van 2S.

Voorbeelden 1 en 2
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

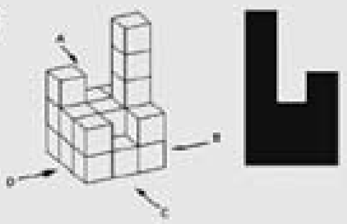
2] $2\frac{1}{2}$ uur = __________ minuten

3] Van een stuk weg van 2 km wordt het wegdek vernieuwd.
1600 meter is al klaar.
Hoeveel meter moet nog?

________ m

Voorbeeld 3
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 25 leerling

3]

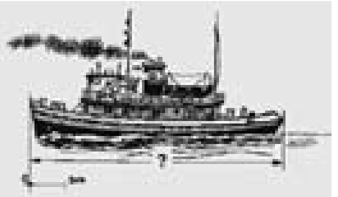


Pieter heeft een zijaanzicht van het bouwwerk getekend.
Welk zijaanzicht heeft hij getekend?

Zijaanzicht ________

Voorbeelden 4 en 5
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

6]



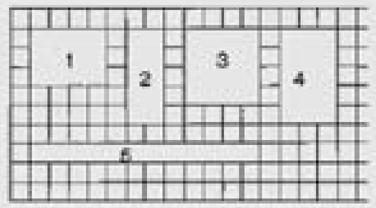
Gebruik je liniaal.
Hoe lang is deze boot in werkelijkheid?

________ meter

4] 1987 gram is bijna ________ kg

Voorbeelden 6 en 7
Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

4]



Welke twee tuinen hebben een even grote oppervlakte?

5] Marloes heeft
40 munten van 1 eurocent en
40 munten van 2 eurocent en
40 munten van 5 eurocent.
Hoeveel euro is dat in totaal?

Voorbeeld 8
Bron: CSE Wiskunde vmbo kb 2007 eerste tijdvak

2 Op een andere plaats is de helikopter uit Rotterdam nodig. De piloot krijgt als aanwijzing een koers te vliegen onder een hoek van 170° over een afstand van 55 km.
→ Geef in de tekening op de uitwerkbijlage met de letter *P* de plaats aan waar de helikopter uit Rotterdam nodig is. Laat de hulplijnen staan om duidelijk te maken hoe je aan je antwoord komt.

Voorbeeld 9
Bron: CSE Wiskunde vmbo kb 2007 eerste tijdvak

2p 11 Laat met een berekening zien dat de oppervlakte van driehoek *ABC* ongeveer 67,7 cm^2 is.

4p 12 Omdat de drie plaatjes schuin staan, is de hoogte van de vaas 29,5 cm.
→ Bereken in één decimaal hoeveel liter water er maximaal in de vaas gaat. Schrijf je berekening op.

Voorbeeld 10
Bron: CSE Wiskunde vmbo bb 2007 eerste tijdvak

Op die dag wordt de Eiffeltoren bezocht.
Daar kun je beeldjes van de Eiffeltoren kopen.
De beeldjes zijn 31,7 centimeter hoog.
De schaal van de beeldjes is 1:1000.

4 Bereken hoeveel meter de werkelijke hoogte van de Eiffeltoren is.
Schrijf hieronder je berekening op.

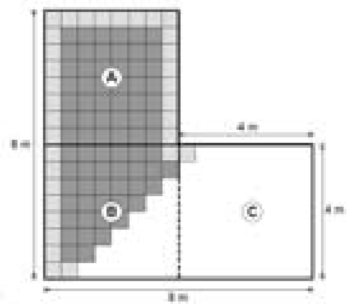
Voorbeeld 11
Bron: CSE Handel en administratie vmbo bb 2004 tweede tijdvak

Bij opening van de winkel zit er € 375,- wisselgeld in de kassa's. Gedurende de dag is er € 8.000,- uit de kassa's gehaald en in de kluis gelegd. Bij het sluiten van de winkel zit er € 4.127,50 in de kassa's. De dagomzet is € 11.852,50.
→ Hoeveel is het kasverschil? Vul het schema in.

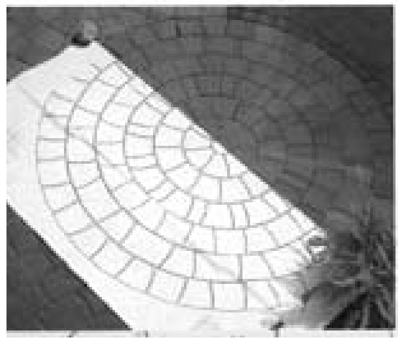
Voorbeeld 12
Bron: CSE Wiskunde vmbo bb 2007 tweede tijdvak

Onder alle tegels moet een ondertapijt komen.
Met 1 rol ondertapijt kan 15 m^2 vloer bedekt worden.

Bereken hoeveel rollen ondertapijt Annemarie voor haar woonkamer minimaal nodig heeft.
Schrijf hieronder je berekening op.



Voorbeeld 13
(eigen opgave)



Een cirkelvormig terras, geschikt voor vier personen, moet een diameter van minstens 3 m hebben.

1. Hoe kun je zo'n terras uitzetten in een zandbed?
2. Bovenstaand terras heeft volgens de folder van het tuincentrum een oppervlakte van 9 m². Is het geschikt voor vier personen?

Voorbeeldopgaven Meten en Meetkunde - 1S

Voorbeeld 14 en 15
Bron PPON - goed door percentiel 75 leerling

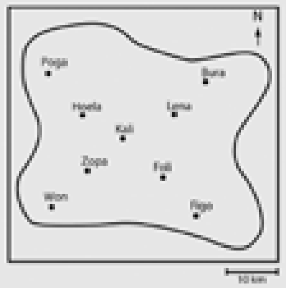
11]

Hoeveel liter cassis is nodig voor dit recept?

12] 2,5 kg is 2 kg en _______ gram.

Voorbeeld 16
Bron PPON - goed door percentiel 75 leerling

7]



Welke plaats ligt 20 km ten zuidoosten van Kali?

Voorbeeld 17
Bron PPON - goed door percentiel 90 leerling, bijna goed percentiel 75 leerling

**9] Erik koopt een videospel van € 46,52.
Hij betaalt met een briefje van 50 euro
en nog 2 cent.
Hoeveel krijgt Erik terug?**

€ ________

Voorbeeld 18
Bron PPON - goed door percentiel 90 leerling, matig percentiel 75 leerling

12]

Op een rol zit 2 meter pakpapier.
Hoeveel stukken van 25 cm bij 25 cm kan ik in totaal uit 1 rol knippen?

Voorbeeld 19
Bron PPON - goed door percentiel 90 leerling, matig percentiel 75 leerling

**Koen heeft pech onderweg.
Hij staat bij het bordje 36,4 km. Bij het bordje 37,0 km kan hij om hulp bellen.
Hoeveel meter moet hij lopen tot het bordje 37,0 km?**

Voorbeeld 20
Bron PPON - matig door percentiel 90 leerling

16] Vul de goede maat in.
Kies uit: mm², cm², dm², m², hm², km².

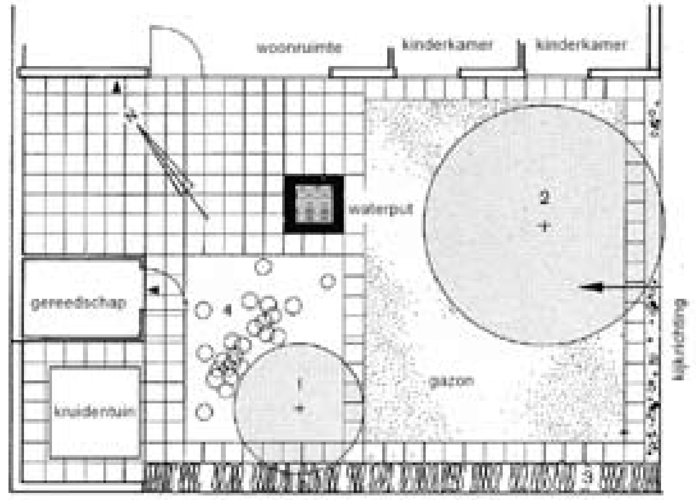
De oppervlakte van een vingernagel is ongeveer 1 ________

De oppervlakte van het blad waarop je werkt is ongeveer 600 ________

Voorbeeldopgaven Meten en Meetkunde - 2S

Voorbeeld 21
Bron: CSE Landbouw en natuurlijke omgeving vmbo GL 2007 eerste tijdvak

Bij het ontwerpen van tuinen worden tuintekeningen gebruikt. Op de afbeelding staat een voorbeeld van een tekening van een binnentuin.



schaal 1 : 100

Op de definitieve tekening is het gazon 5,3 cm breed en 7,0 cm lang.
→ Hoeveel m² is de oppervlakte van het gazon in werkelijkheid?
Schrijf de berekening op.

10 De operationalisering voor *Verbanden*

10.1 Inleiding

Het gebied Verbanden gaat over het omgaan met tabellen, grafieken, formules en vuistregels waarin patronen of verbanden weergegeven kunnen zijn. Tabellen en grafieken worden tegenwoordig in vele toepassingen frequent gebruikt om kwantitatieve gegevens op een compacte en overzichtelijke manier weer te geven. Op de televisie, in dagbladen en schoolboeken worden allerlei soorten grafieken en tabellen ingezet om met name kwantitatieve informatie over te brengen. Aflezen en interpreteren van de verschillende representatievormen, grafisch weergeven van informatie en het herkennen en beschrijven van een onderliggend verband (als dit er is) zijn belangrijke vaardigheden. Het onderwerp lezen van tabellen en grafieken en het opereren op basis van gegevens uit tabellen en grafieken komt voor in het basisonderwijs en is in 2004 ook getoetst in het PPON bij rekenen & wiskunde. Dit onderwerp was in het PPON eerder opgenomen in het onderdeel informatieverwerking van de peilingen voor Nederlandse taal. Als we meetgegevens in grafieken verwerken is er tevens een relatie met het domein meten (TAL-team, 2007). In het vo zit dit onderwerp op het grensvlak van de subdomeinen algebra en informatieverwerk ing&statistiek.
In deze uitwerking beschrijven we niet het volledige domein dat in de schoolwiskunde meestal met algebra wordt aangeduid. We beperken ons globaal gezegd tot het bovengenoemde omgaan met tabellen en grafieken, het herkennen en beschrijven van patronen en rekenen met en begrip van formules en vuistregels. Het gaat hier dus niet om algebraïsche herleidingen.

10.2 Referentieniveau 1 (12 jaar)

In de kerndoelen po staat geen specifiek kerndoel op het gebied van verbanden. Bij "Taal" komt zo'n kerndoel overigens wel voor. In kerndoel 4 staat dat leerlingen leren informatie te achterhalen in informatieve en instructieve teksten, waaronder schema's, tabellen en digitale bronnen. In de karakteristiek wordt beschreven dat de verschillende representaties deel uitmaken van de wiskundetaal:
De wiskundetaal betreft onder andere rekenwiskundige en meetkundige zegswijzen, formele en informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen en grafieken en opdrachten voor de rekenmachine.

Kerndoel 23 voor wiskunde luidt:
De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken.

We hebben op dit eerste referentieniveau ook doelen toegevoegd op het gebied van het herkennen en beschrijven van patronen in diverse representaties: visueel (stippenpatronen), grafieken, getalpatronen, tekst (vuistregels). Dit onderwerp bereidt voor op de 'algebra' van verbanden die in het voortgezet onderwijs veel aandacht krijgt. Door ook in het po hieraan aandacht te besteden kan een doorlopende leerlijn ontstaan. Internationaal is het overigens gebruikelijk om al in het po aandacht te besteden aan het herkennen en beschrijven van (getal)patronen.
De *fundamentele kwaliteit* op dit referentieniveau (1F) beschrijft het minimum dat beheerst zou moeten worden op dit gebied aan het eind van de basisschool. Voor deze fundamentele kwaliteit beschrijven we doelen die wenselijk zijn en houden daarbij rekening met de haalbaarheid. De nadruk ligt op basale vaardigheden op het gebied van aflezen en interpreteren van veel voorkomende tabellen en eenvoudige grafieken en diagrammen. Ook maken van eenvoudige grafieken/diagrammen is een doel.

Op dit referentieniveau omvat de *streefkwaliteit* 1S alles dat genoemd is voor de fundamentele kwaliteit 1F en is daar een verdieping van en soms een uitbreiding op. De verdieping gaat vooral in de richting van het wiskundig begrippenkader en het doorzien van de relaties tussen representaties. Interpoleren en extrapoleren en het herkennen van en trend in gegevens zijn onderwerpen op dit niveau.

10.3 Referentieniveau 2 (16 jaar)

In de kerndoel(en) onderbouw vo staat het volgende op het gebied van verbanden en de representatievormen ervan:

19. De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen, en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen.
25. De leerling leert informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen, grafieken en formules te gebruiken om greep te krijgen op verbanden tussen grootheden en variabelen.
27. De leerling leert gegevens systematisch te beschrijven, ordenen en visualiseren, en leert gegevens, representaties en conclusies kritisch te beoordelen.

Het examenprogramma wiskunde voor het vmbo (2008) voegt daar eindtermen binnen het subdomein algebraïsche verbanden aan toe. We nemen hier alleen de geglobaliseerde eindtermen over. De details en subdoelen worden voor zover van toepassing voor dit referentieniveau verwerkt in de concretisering in de tabellen (aan het eind van dit hoofdstuk). Deze concretisering beslaat zoals eerder gezegd maar een deel van het wiskundig subdomein algebraïsche verbanden.

• De kandidaat kan problemen oplossen waarin verbanden tussen variabelen een rol spelen, en daarbij:
  - tabellen, grafieken en (woord)formules hanteren bij verschillende typen verbanden
  - geschikte wiskundige modellen gebruiken.

Ook is er een geglobaliseerde eindterm op het gebied van informatieverwerking en statistiek die in dit gebied hoort:
• De kandidaat kan informatie verzamelen, weergeven en analyseren met behulp van grafische voorstellingen, en daarbij:
  - statistische representatievormen en een graaf hanteren
  - op basis van de verwerkte informatie verwachtingen uitspreken en conclusies trekken.

De *fundamentele kwaliteit* van dit tweede referentieniveau, 2F, is gericht op het gebruiken en toepassen van kennis, vaardigheden en inzicht ontwikkeld in de fundamentele kwaliteit van het eerste referentieniveau (1F). De fundamentele kwaliteit 2F is op te vatten als een basis aan kennen en kunnen op het gebied van verbanden waar iedere Nederlander over zou moeten beschikken. Het gaat hier met name om het werken met eenvoudige verbanden die voorkomen in toepassingssituaties en om het kritisch beoordelen van informatie die grafisch wordt gerepresenteerd.

De *streefkwaliteit* (2S) op dit referentieniveau bouwt voort op de streefkwaliteit van het eerste referentieniveau 1S. Het is niet zo dat de streefkwaliteit (2S) de fundamentele kwaliteit (2F) geheel omvat. In 2F staat het toepassen en gebruiken centraal, hiermee vergeleken gaat het in 2S om verdiepen, formaliseren en generaliseren en soms ook om uitbreiden. We komen hier al snel bij het bestuderen van formules en grafieken als onderwerp van studie op zichzelf. Voor de beschrijving van de referentieniveaus gaan we daar niet verder op in.

10.4 Referentieniveau 3 (17-20 jaar)

Op dit referentieniveau zijn de verschillen tussen de te onderscheiden groepen leerlingen groot. Maar toch kan er voor het gebied verbanden wel een gemeenschappelijk *fundamentele kwaliteit* worden geformuleerd (3F). Bij deze kwaliteit gaat het om consolidatie en onderhoud. Dat onderhoud vindt plaats in toepassingen uit het dagelijks leven en beroepssituaties die complexer van aard zijn dan op de fundamentele kwaliteit 2F. Grafieken zijn complexer, er kunnen meer relevante variabelen zijn in de vuistregels of formules waarmee gerekend moet worden. De kennis en vaardigheden die gebruikt worden verschillen verder niet van die in 2F.

Voor de *streefkwaliteit* van het derde referentieniveau (3S), moeten we denken aan leerlingen op de havo met wiskunde A. Ook daar gaat het vooral om consolidatie en gebruik in wiskundige- en toepassingssituaties die complex van aard kunnen zijn. Laten zien hoe een verandering in een situatie doorwerkt in een grafiek of formule en omgekeerd is een belangrijk onderwerp. Bij deze kwaliteit wordt verder een relatie gelegd tussen (rekenen met) verhoudingen en algebra (functies) en worden bijvoorbeeld verhoudingen en evenredige verbanden aan elkaar gerelateerd.

10.5 Concretisering

In de tabel op de volgende pagina's wordt het gebied verbanden geconcretiseerd. De inhouden op het gebied van verbanden wordt beschreven voor elk van de drie referentieniveaus en daarbinnen steeds voor de fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteit naast elkaar.
Daarbij is sprake van een getrapte indeling, als eerste in:

1. Notatie, taal en betekenis
   - Analyseren en interpreteren van informatie uit tabellen, grafische voorstellingen en beschrijvingen
   - Kennis van diagrammen, tabellen en grafieken
2. Met elkaar in verband brengen
   - De voorstellingsvormen tabel, grafiek, formule of verwoording met elkaar in verband brengen
   - Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven
   - Patronen beschrijven
3. Gebruiken
   - Tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen
   - Rekenvaardigheden gebruiken

Daarbinnen is steeds het soort 'weten' omschreven, we onderscheiden drie soorten:
• *Paraat hebben:* kennis van feiten en begrippen, reproduceren, routines, technieken.
• *Functioneel gebruiken:* probleemaanpak, toepassen, gebruiken, onderzoeksvaardigheden
• *Weten waarom:* begrijpen, principes, abstracties, rijke cognitieve schema's, overzicht

Na de tabel zijn voorbeeldopgaven opgenomen om een beeld te geven van de beschreven inhouden en niveaus.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Analyseren en interpreteren van informatie uit tabellen, grafische voorstellingen en beschrijvingen – Veel voorkomende diagrammen en grafieken	– informatie uit veel voorkomende tabellen aflezen zoals dienstregeling, lesrooster	– legenda – assenstelsel
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– eenvoudige globale grafieken en diagrammen (beschrijving van een situatie) lezen en interpreteren – eenvoudige legenda	– trend in gegevens onderkennen – staafdiagram, cirkeldiagram
	Weten waarom	Weten waarom
	– uit beschrijving in woorden eenvoudig patroon herkennen	– grafiek in de betekenis van 'grafische voorstelling'

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verschillende voorstellings-vormen met elkaar in verband brengen – Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven – Patronen beschrijven	– eenvoudige tabel gebruiken om informatie uit een situatiebeschrijving te ordenen	– eenvoudige tabellen en diagrammen opstellen op basis van een beschrijving in woorden – globale grafiek tekenen op basis van een beschrijving in woorden, bijvoorbeeld: tijd-afstand grafiek – eenvoudige patronen in rijen getallen en figuren herkennen en voortzetten: 1 – 3 – 5 – 7 - .... 100 – 93 – 86 – 79 – ..... – stippatronen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– eenvoudige patronen (vanuit situatie) beschrijven in woorden, bijvoorbeeld: Vogels vliegen in V-vorm. "Er komen er steeds 2 bij."	– conclusies trekken door gegevens uit verschillende informatiebronnen met elkaar in verband te brengen (alleen in eenvoudige gevallen)
	Weten waarom	Weten waarom
	– informatie op veel verschillende manieren kan worden geordend en weergegeven	– keuze om informatie te ordenen door middel van tabel, grafiek, diagram

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.

12 jaar	1 - fundament	1 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen – Rekenvaardigheden gebruiken	– eenvoudig staafdiagram maken op basis van gegevens	– berekeningen uitvoeren op basis van informatie uit tabellen, grafieken en diagrammen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– kwantitatieve informatie uit tabellen en grafieken gebruiken om eenvoudige berekeningen uit te voeren en conclusies te trekken, bijvoorbeeld: In welk jaar is het aantal auto's verdubbeld t.o.v. het jaar daarvoor?	– punten in een assenstelsel plaatsen en coördinaten aflezen (alleen positieve getallen) – globale grafieken vergelijken, bijvoorbeeld: wie is het eerst bij de finish?
	Weten waarom	Weten waarom
		– op basis van een grafiek of diagram conclusies trekken over een situatie – op basis van een grafiek of diagram voorspellingen doen over een toekomstige situatie

NB. 1S omvat de inhouden van 1F.
In de verschillende 'cellen' zijn voorbeelden genoemd. Deze zijn niet uitputtend.

16 en 17 -20 jaar	1 - fundament	1 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Analyseren en interpreteren van informatie uit tabellen, grafische voorstellingen en beschrijvingen – Veel voorkomende diagrammen en grafieken	– beschrijven van verloop van een grafiek met termen als stijgend, dalend, steeds herhalend, minimum, maximum – snijpunt (twee rechte lijnen, snijpunten met de assen) – negatieve en andere dan gehele coördinaten in een assenstelsel – op een kritische manier lezen en interpreteren van verschillende soorten diagrammen en grafieken – eventuele misleidende informatie herkennen, bijvoorbeeld door indeling assen, vorm van de grafiek etc. – betekenis van variabelen in een (woord)formule	– informatie kritisch beoordelen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
		– formules met meer variabelen herkennen en gebruiken – diagrammen en grafieken uit beroepssituaties gebruiken
	Weten waarom	Weten waarom

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verschillende voorstellings-vormen met elkaar in verband brengen – Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven – Patronen beschrijven	– grafiek tekenen bij informatie of tabel – regelmatigheden in een tabel beschrijven met woorden, grafieken en eenvoudige (woord)formules: Door elk winkelwagentje dat aan de rij wordt toegevoegd, wordt die rij 40 cm langer.	– in een formule een variabele vervangen door een getal en de waarde van de andere variabele berekenen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– uit het verloop, de vorm en de plaats van punten in een grafiek conclusies trekken over de bijbehorende situatie: De verkoop neemt steeds sneller toe.	– uit het verloop, de vorm, en de plaats van punten in een grafiek conclusies trekken over een complexe- dan wel beroepssituatie
	Weten waarom	Weten waarom
	– uit de vorm van een formule conclusies trekken over het verloop van de bijbehorende grafiek (alleen lineair en exponentieel): De grafiek die hoort bij lengte stok = 5 + 0,7 × lengte persoon (Nordic Walking) is een rechte lijn.	– uit de vorm van een formule conclusies trekken over het verloop van de bijbehorende grafiek

16 en 17 -20 jaar	2 - fundament	3 - fundament
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen – Rekenvaardigheden gebruiken	– in een (woord) formule een variabele vervangen door een getal en de waarde van de andere variabele berekenen	– kwantitatieve informatie uit tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken om berekeningen uit te voeren en conclusies te trekken
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– formules herkennen als vuistregel of als rekenvoorschrift en omgekeerd: Een mijl is ongeveer anderhalve kilometer; aantal mijlen ≈ 1,5 × aantal km – kwantitatieve informatie uit tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken om berekeningen uit te voeren en conclusies te trekken: vergelijkingen tussen producten maken op basis van informatie in tabellen.	– gecompliceerde tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen
	Weten waarom	Weten waarom
	– overzicht van (evenredige) groei	

NB. 2F omvat de inhouden van 1F, 3F omvat de inhouden van 2F

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
A Notatie, taal en betekenis	Paraat hebben	Paraat hebben
– Analyseren en interpreteren van informatie uit tabellen, grafische voorstellingen en beschrijvingen – Veel voorkomende diagrammen en grafieken	– verschillende soorten 'groei' beschrijven met termen als constant, lineair, exponentieel, periodiek – betekenis van snijpunten vanuit de formule – som- en verschilgrafiek – parabool	– kwalitatief redeneren en daarbij wiskundige notaties en formules gebruiken
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– interpolatie (niet als term) – extrapolatie (niet als term)	– kwalitatief redeneren en daarbij wiskundige notaties en formules gebruiken
	Weten waarom	Weten waarom
	– conclusies trekken op basis van de structuur van een grafiek of formule	– verdubbelingstijd, halveringstijd

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
B Met elkaar in verband brengen	Paraat hebben	Paraat hebben
– Verschillende voorstellings-vormen met elkaar in verband brengen – Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven – Patronen beschrijven	– vaststellen hoe een verandering in de voorstellingsvorm (grafiek, tabel, formule, beschrijving) doorwerkt in de andere vorm(en) – een situatie beschrijven via een standaardverband (lineair, exponentieel) – bij een eenvoudig lineair verband (beschrijving of grafiek) een formule opstellen	– bij een lineair verband (beschrijving of grafiek) een formule opstellen – exponentiële processen herkennen, met formules beschrijven en in grafieken tekenen – evenredige en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en gebruiken met hun specifieke eigenschappen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– kennis van grafieken en (standaard)verbanden gebruiken om problemen op te lossen	– uit het verloop, de vorm, en de plaats van punten in een grafiek conclusies trekken over de bijbehorende formule
	Weten waarom	Weten waarom
	– verschillende formules hetzelfde verband kunnen beschrijven – vorm van formule, tabel en grafiek bij enkele (standaard)verbanden met elkaar in verband brengen	– snijpunten van grafieken interpreteren binnen een context – uitspraken doen over de rol of betekenis van variabelen of constanten in een formule

16 en 17 -20 jaar	2 - streef	3 - streef
C Gebruiken	Paraat hebben	Paraat hebben
– Tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen – Rekenvaardigheden gebruiken	– ook met complexer formules in standaardnotatie	
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	– kennis van grafieken en formules gebruiken om problemen op te lossen	– berekeningen uitvoeren aan processen die op verschillende manieren beschreven kunnen zijn
	Weten waarom	Weten waarom
	– grafieken en hun kenmerken als onderdeel van verdere studie	– grafieken en hun kenmerken als onderdeel van verdere studie

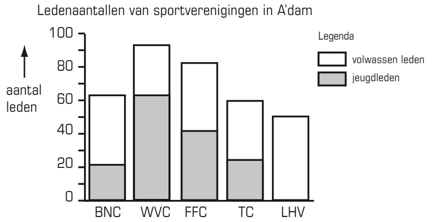
NB. 2S omvat de inhouden van 1S, 3S omvat de inhouden van 2S

'De lat mag voor rekenen wel wat hoger worden gelegd'

Door het beperkte aantal opgaven dat dit onderwerp tot nu toe in PPON kent worden op dit niveau slechts twee voorbeelden gegeven, voor percentiel 10 leerling en percentiel 50 leerling.

Voorbeeld 1

Bron: PPON - goed tot matig beheerst door percentiel 10 leerling



Welke sportvereniging bestaat voor $\frac{1}{3}$ deel uit jeugdleden?

____

Voorbeeld 2

Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 50 leerling

5]

Shampoo	Clean	Soft	Fresh	Beauty
Inhoud	400 ml	300 ml	600 ml	500 ml
Prijs	€ 3,20	€ 3,–	€ 5,40	€ 3,50

Welke shampoo is in vergelijking met de hoeveelheid die je krijgt het goedkoopst?

____

Voorbeeld 3

Bron: CSE Wiskunde vmbo KB 2005 eerste tijdvak

GROEI

Om de gemiddelde lengte van jongens van 0 tot en met 20 jaar uit te rekenen, kun je een vuistregel gebruiken. Hieronder staat de woordformule van deze vuistregel.

$$\textit{gemiddelde lengte} = 50 + \sqrt{900 \times \textit{leeftijd}}$$

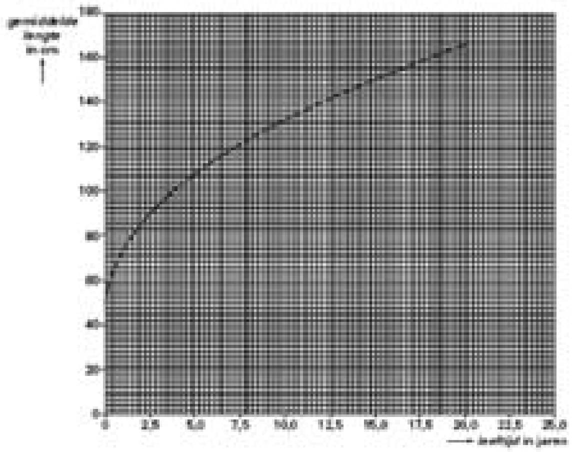
Hierin is *gemiddelde lengte* in cm en *leeftijd* in jaren.

16 Pieter is op dit moment 6 jaar.
→ Bereken met bovenstaande woordformule de gemiddelde lengte van jongens van zijn leeftijd in cm. Schrijf je berekening op.

17 In de uitwerkbijlage bij vraag 17 staat een assenstelsel getekend.
→ Teken de grafiek die bij bovenstaande woordformule hoort in dit assenstelsel. Je mag de tabel gebruiken.

18 De woordformule geldt alleen voor jongens tot en met 20 jaar. Marieke wil met een berekening aantonen dat deze woordformule inderdaad niet te gebruiken is om de gemiddelde lengte van een man van 60 jaar te berekenen.
→ Laat zien hoe Marieke dat aantoont.

Om de gemiddelde lengte van meisjes van 0 tot en met 20 jaar uit te rekenen, kun je ook een vuistregel gebruiken. Hieronder staat de grafiek getekend die bij deze vuistregel hoort.

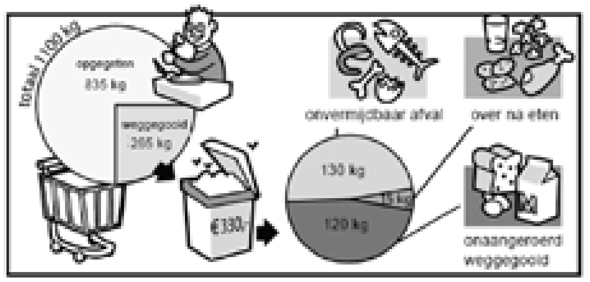


19 In de grafiek is te zien dat meisjes van 10 jaar oud gemiddeld 132 cm lang zijn.
→ Met hoeveel procent neemt de gemiddelde lengte van meisjes tussen 10 en 15 jaar toe? Schrijf je berekening op.

Voorbeeld 4

Bron: CSE Wiskunde vmbo kb 2006 eerste tijdvak

In Nederland wordt elke dag veel van het gekochte voedsel weggegooid. Een groot deel hiervan verdwijnt zelfs onaangeroerd in de afvalbak.
In het diagram hieronder kun je aflezen hoeveel voedsel er in één jaar door een gemiddeld huishouden wordt gekocht en hoeveel er wordt weggegooid.

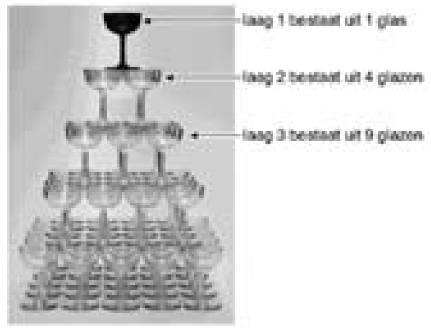


3p O 10 → Bereken hoeveel euro 1 kg weggegooid voedsel gemiddeld kost. Schrijf je berekening op.

3p O 11 In het cirkeldiagram aan de linkerkant lijkt het dat ongeveer een kwart van het gekochte voedsel wordt weggegooid.
→ Bereken hoeveel procent van het gekochte voedsel in één jaar wordt weggegooid. Schrijf je berekening op.

Voorbeeld 5

Bron: CSE Wiskunde vmbo bb 2007 eerste tijdvak



2p 7 Hierboven zie je een foto van een champagnetoren die uit 5 lagen bestaat.
→ Laat hieronder met een berekening zien dat je voor deze champagnetoren in totaal 55 glazen nodig hebt.

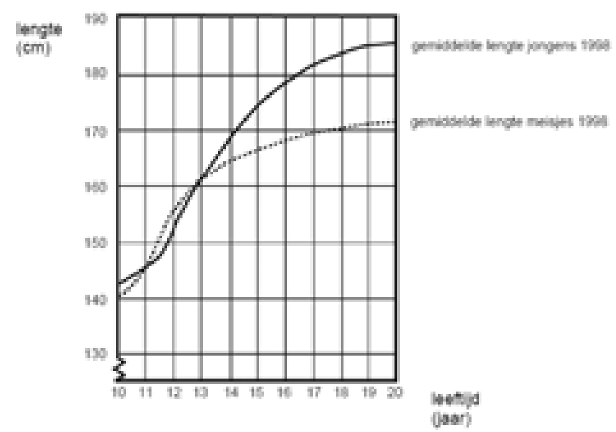
3p 8 Op een bruiloft worden 125 gasten verwacht.
Elke gast moet 1 glas champagne van de champagnetoren kunnen nemen.
→ Bereken uit hoeveel lagen de champagnetoren dan minimaal moet bestaan. Schrijf hieronder je berekening op.

Voorbeeld 6

Bron: Pisa 2003 (vraag 2 Pisa niveau 4, p-waarde 77; vraag 3 Pisa niveau 3, p-waarde ongeveer 80)

JONGEREN STEEDS LANGER

In deze grafiek wordt de gemiddelde lengte van zowel jongens als meisjes in Nederland in 1998 weergegeven.



Vraag 2: JONGEREN STEEDS LANGER
Leg uit hoe je aan de grafiek kunt zien dat het gemiddelde groeitempo van meisjes langzamer wordt na hun 12de jaar.

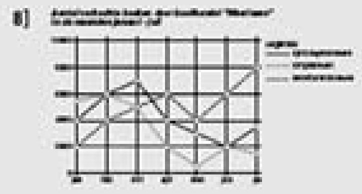
Vraag 3: JONGEREN STEEDS LANGER
Tijdens welke periode in hun leven zijn, volgens deze grafiek, meisjes gemiddeld langer dan jongens van dezelfde leeftijd?

Door het beperkte aantal opgaven dat dit onderwerp tot nu toe in PPON kent worden slechts twee voorbeelden gegeven, voor percentiel 90 leerling.

Voorbeeld 7

Bron: PPON - goed beheerst door percentiel 90 leerling

8]



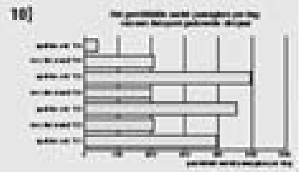
In welke maand zijn in totaal de meeste boeken verkocht?

In ________

Voorbeeld 8

Bron: PPON - matig beheerst door percentiel 90 leerling

10]



Als het aantal passagiers op dezelfde wijze blijft toenemen, hoeveel passagiers zullen dan in de periode april tot en met oktober 2004 per dag met de fietspont gaan?

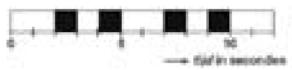
A ongeveer 200
B ongeveer 500
C ongeveer 550
D ongeveer 600
E ongeveer 700

Voorbeeldopgaven Verbanden - 2S

Voorbeeld 9

Bron: CSE Wiskunde vmbo GL/TL 2003 eerste tijdvak

Hieronder zie je de lichtsignalen die een andere vuurtoren uitzendt. Deze vuurtoren zendt lichtsignalen van twee en één seconden uit.



2p **24** → Hoeveel seconden duurt één periode van deze vuurtoren?

3p **25** Theo beweert dat deze vuurtoren in één minuut 25 lichtsignalen uitzendt.
→ Laat zien dat Theo ongelijk heeft.

Voorbeeldopgaven Verbanden - 3S

Voorbeeld 10

Bron: CSE Wiskunde havo A12 2001 tijdvak 1

Opgave 2 Verwarming

Om een kamer goed te kunnen verwarmen, moet de verwarmingsradiator voldoende capaciteit hebben. Een grote kamer heeft natuurlijk een radiator met een grotere capaciteit nodig dan een kleine kamer.
De verwarmingsinstallateur bepaalt aan de hand van onderstaande tabel hoe groot de capaciteit van een radiator moet zijn. De inhoud van een kamer (vertrek) wordt gegeven in m^3 en de capaciteit van een radiator in Watt.

tabel 1

Benodigde capaciteit in Watt per m^3	vertrekken met 1 buitenmuur			vertrekken met 2 buitenmuren			vertrekken met 3 buitenmuren		
	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3	kleiner dan 50 m^3	van 50 m^3 tot 150 m^3	groter dan 150 m^3
begane grond	70	60	55	85	70	60	100	80	70
1^e verdieping	60	55	50	70	60	50	80	70	60
2^e verdieping	70	60	55	85	70	60	100	80	70
badkamers	als voor een normaal vertrek, met een toeslag van 20%								

Uit tabel 1 lees je bijvoorbeeld af dat voor een kamer van 40 m^3 op de tweede verdieping met twee buitenmuren een radiator met een capaciteit van $85 \times 40 = 3400$ Watt nodig is.

Iemand heeft nog de oude radiator die geschikt was om de kinderkamer te verwarmen. Hij vraagt zich af of deze radiator geschikt is voor de vernieuwde badkamer. De kinderkamer van 30 m^3 was op de begane grond en had één buitenmuur. De badkamer op de eerste verdieping is wel kleiner, de inhoud is maar 24 m^3, maar er zijn twee buitenmuren. En in een badkamer moet het iets warmer zijn dan in andere vertrekken: volgens tabel 1 is daarvoor 20% extra capaciteit nodig.

6p **6** Heeft de oude radiator voldoende capaciteit? Licht je antwoord toe.

'Als kinderen meer kunnen dan het streefniveau, moet je ze daar ook toe uitdagen'

Aanbevelingen

1 Gedifferentieerde benadering
Met behoud van de aandacht voor leerlingen voor wie het algemeen maatschappelijk niveau 1F-2F-3F het natuurlijk plafond is, moeten meer leerlingen op het hogere niveau 1S-2S-3S gaan presteren dan nu het geval is.

2 Niveauverhoging basisonderwijs
Het basisonderwijs is funderend onderwijs en moet alle leerlingen de kans bieden op een solide basis voor de verschillende daarop volgende leerroutes. Er is een stevige krachtsinspanning nodig om het gewenste hogere niveau op de aangegeven zwakke punten in de kwaliteit van de opbrengst van het basisonderwijs te bereiken.

3 Onderzoek naar onderwijspraktijk po
Voor de verklaring van de gesignaleerde verslechteringen en magere resultaten op onderdelen in het peilingsonderzoek PPON2004 is nader onderzoek noodzakelijk naar wat en hoe er in de praktijk van het basisonderwijs wordt onderwezen.

4 Peilingsonderzoek naar opbrengst voortgezet onderwijs
Analoog aan PPON voor het po is het wenselijk om ook voor het vo een langlopend peilingsonderzoek op te zetten om betrouwbare informatie te verkrijgen over de opbrengst voor de basisvaardigheden taal en rekenen.

5 Paraat hebben
Een duidelijk te benoemen fundament aan begrippen, rekenfeiten, automatismen, routines, moet worden geconsolideerd en verankerd. In de praktijk van het onderwijs moet meer expliciet werk worden gemaakt van het systematisch consolideren en oefenen totdat het gewenste beheersingsniveau van paraat hebben is bereikt.

6 Gebruiken in andere leergebieden
Het gebruiken en onderhouden van basisvaardigheden op het gebied van het rekenen & wiskunde moet voor een belangrijk deel plaats vinden tijdens het toepassen in andere leergebieden en praktijksituaties. De aanpak die in rekenen & wiskunde is aangeleerd moet bij de docenten van andere vakken bekend zijn en zoveel mogelijk worden gebruikt.

7 Verdiepen
Rekening houden met verschillen houdt voor rekenen & wiskunde ook in dat de leerlingen die beter kunnen abstraheren, formeel manipuleren en generaliseren dan de modale leerlingen in hun onderwijsgroep door het verdiepen worden uitgedaagd om in de beschikbare tijd hun plafond te benaderen.

8 Onderhouden in onderbouw havo-vwo
Bij de overgang van het basisonderwijs naar havo-vwo sluiten van beide kanten de leerlijnen rekenen & wiskunde niet goed aan. In de onderbouw havo-vwo wordt niet meer systematisch gewerkt aan het onderhouden en uitbreiden van de verworven kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen. Op basis van de referentieniveaus moeten in nationaal en regionaal overleg tussen scholen voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs die leerlijnen worden geharmoniseerd.

9 Rekenen & wiskunde voor alle leerlingen in het vmbo
Alle leerlingen moeten minimaal het basale referentieniveau 2F (burgerschapsniveau) bereiken, wat kan worden gerealiseerd door ze minimaal het rekendomein uit het vmbo examenprogramma wiskunde kb te laten volgen.

10 Herstel leerlijnen in het mbo
Overeenkomstig de voorstellen in het 'Raamwerk rekenen-wiskunde mbo' en de door ons beschreven referentieniveaus 2F en 3F moet op korte termijn begonnen worden met het herstel van de ongewenst afgebroken of onderbroken leerlijnen in het mbo.

vervolg aanbevelingen

11 Uitstroomniveau mbo en instroomniveau hbo
In lijn met de voorstellen in het 'Raamwerk rekenen-wiskunde mbo' verdient het aanbeveling om alle mbo-leerlingen minimaal het referentieniveaus 2F te laten bereiken en onderhouden. Het uitbreiden van referentieniveau 2F naar 3F geeft een voldoende kennisbasis voor de instroom in het grootste deel van het hbo.

12 Instroom pabo
Voor instroom in de pabo is het wenselijk een module voortgezet rekenen in mbo en havo te doen ontwikkelen, die opleidt tot een referentieniveau 3S dat beginnende pabo-studenten een stevige vakinhoudelijke basis verschaft.

13 Niet halen van de basiskwaliteit 1F?
De ambitie van de Expertgroep is dat meer leerlingen de basiskwaliteit 1F zullen behalen dan nu het geval is. Voor de groep leerlingen die vanaf groep 6 in de ontwikkeling van hun rekenvaardigheid stagneert, moet een afzonderlijk leertraject worden ontwikkeld.

14 Functionele situaties
Het is wenselijk om met name in het mbo een ontwikkelingsproject uit te voeren, waarin de functionele situaties in maatschappij en beroep het startpunt zijn voor de ontwikkeling van burgerschapscompetenties, waarin de basisvaardigheden uit rekenen & wiskunde een rol kunnen spelen.

15 Ambitie referentieniveaus 1F en 1S
- *Het percentage leerlingen dat minimaal het referentie-niveau 1F behaalt moet toenemen van 75% naar 85%.*
- *Het percentage leerlingen dat minimaal het referentie-niveau 1S behaalt moet toenemen van 50% naar 65%.*

Samenstelling van de werkgroep rekenen & wiskunde

dhr. prof. dr. A. van Streun (voorzitter)	Universiteit van Groningen
	Department of Education in Mathematics and Science
mw. dr. I. van Gulik (secretaris)	SLO
mw. T. Dekker, ma	Freudenthal Institute for Science and mathematics Education
mw. drs. M. Wijers	Freudenthal Institute for Science and mathematics Education
dhr. R. van Asselt	Saxion Hogescholen
dhr. prof. dr. J. van de Craats	Universiteit van Amsterdam
mw. drs. J. van Dijk	lerares wiskunde vo
mw. drs. G.W. Fokkens	lerares wiskunde vo
dhr. A. van der Horst	leraar wiskunde vo
dhr. prof. dr. J. Klep	Institut für Didatik der Mathematik, Universität Giessen
	SLO
mw. dr. M. Kool	Docente Pabo Domstad
mw. drs. M. Meeder	APS
mw. drs. A. Noteboom	SLO
dhr. dr. C.M. van Putten	Universiteit Leiden, Departement Psychologie
dhr. J. van Rooijen	SLO
mw. dr. J. Tissink	MBO Raad

Literatuurverwijzing

Buijs, K. (2007). *Leerstofgebieden en voorbeeldopgaven voor de betere leerlingen van groep 7 en 8.* SLO, Enschede.

Buijs, K. & Zwaart, P. van der (2006). *Aandachtsgebieden voor een doorgaande lijn rekenen-wiskunde van doorgaande lijn rekenen-wiskunde van po naar vmbo.* Enschede: SLO

Cevo (2007) *Wiskunde, Syllabus bb, kb en gt centraal examen vmbo 2008 en 2009*

cTWO, 2006 *Rijk aan betekenis*, http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/Rijkaanbetekenisweb.pdf

Concretisering van de kerndoelen wiskunde voor de onderbouw vo. (SLO, 2007. url: http://ko.slo.nl/vakgebieden/00003/wiskunde_def.pdf)

Craats, J. van de (2007). *Domeinbeschrijving rekenen.* www.science.uva.nl/~craats

Craats, J. van de (2007). *Vergelijking van PPON 2004 met 'Rekenvaardigheden op de basisschool'.* www.science.uva.nl/~craats

Dekker, T., Lagerwaard, K., Lange, J. de e.a. (2006) . *Wiskunde geletterdheid volgens PISA - Hoe staat de vlag erbij? 1.Analyse.* Freudenthal Instituut/Citogroep, Utrecht/Arnhem

Dekker, T., Lagerwaard, K., Lange, J. de e.a. (2006) . *Wiskunde geletterdheid volgens PISA - Hoe staat de vlag erbij? 2.Opgaven.* Freudenthal Instituut/Citogroep, Utrecht/Arnhem

Examenopgaven wiskunde vmbo
Examenopgaven beroepsgerichte vakken vmbo
Examenopgaven wiskunde A12 havo

Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren/ wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven.

Geerdink, G. (2007). *Diversiteit op de pabo. Sekseverschillen in motivatie, curriculumperceptie en studieresultaten.* Radboud Universiteit Nijmegen.

Harskamp (2007) *Reken-wiskunderesultaten van leerlingen aan het einde van de basisschool.*

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1990). *Lijn in verhoudingen.* Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs, 9 (2), 21-26

Heuvel-Panhuizen, M. van den en Wijers, M. (2005). *Mathematics standards and curricula in the Netherlands. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(4), 287-307*

Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys en A. Treffers (red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen, Hele Getallen Bovenbouw Basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Hickendorff, M. Heiser, W.J. Putten, C.M. van & Verhelst, N.D. (submitted for publucation, 2007). *Solution strategies and achievement in Dutch written arithmetic: Latent variable modeling of change.* Leiden University and Cito, Arnhem

Hoogeveen, K. (1999). *Het kunnen allemaal je eigen kinderen zijn.* Universiteit Leiden.
ingestelde werkgroep rekenen/wiskunde)

Hoogland, K & Meeder, M. (2007). *Gecijferdheid in beeld.* APS

Janssen, J., Van der Schoot, F. & Hemker, B., *Balans van het reken-wiskundeonderwijs op het einde van de basisschool 4.* PPON-reeks nr. 32. CITO, 2004.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (2001). *Adding It Up*, National Research Council, Washington, 2001.

Klep, J. (2007). *(Lineaire) verhoudingen: begrip en vaardigheden*. (tekst geschreven voor de door de Expertgroep ingestelde werkgroep rekenen/wiskunde).

Klep, J. (2007). *Verstand hebben van getallen*. (tekst geschreven voor de door de Expertgroep ingestelde werkgroep rekenen/wiskunde)

Kuyper, H. en van der Werf, M.P.C. (2007). *De resultaten van VOCL'93 en VOCL'99: Vergelijkende analyses van prestaties en rendement*. GION, Groningen

Noteboom, A. (2007). *Minimumdoelen Minimumdoelen rekenen-wiskunde einde basisonderwijs voor zwakke rekenaars*. Enschede, SLO.

Noteboom, A. e.a.: *Leren rekenen met perspectief*. Enschede: SLO, 2008.

Putten, C.M. van (2005). *Strategiegebruik bij het oplossen van deelsommen*. In J. Janssen, F. van der Schoot, & B. Hemker, *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs op het einde van de basisschool 4 (p. 125-131)*. PPON-reeks nr. 32. Arnhem: CITO.

Putten, C.M. van & Hickendorff, M. (2006). *Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden vaan deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997*. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 25 (2), 16-25.

Rademaker, G., Van Putten, C., Beishuizen, M., & Janssen, J. (2004). *Traditionele en realistische algoritmen bij het oplossen van deelsommen in groep 8*: Een nadere analyse van PPON-materiaal uit 1997. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 23 (4), 9-13*.

ReAl, SLO 2007. http://www.slo.nl/real

TAL-team (2006). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*. Groningen: Wolters Noordhoff

TAL-team (2007). *Meten en meetkunde bovenbouw*. Groningen: Wolters Noordhoff

Streun A. van (Oratie) *Het denken bevorderen*. RUG, 2001. http://www.rug.nl/fwn/voorzieningen/ido/betadidactiek/Onderzoek/onderzoekers/annevanstreun/VanStreunOratie.pdf

Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan. Wiskunde 12-16: band 2*. Utrecht, Enschede: Freudenthal Instituut, Stichting leerplanontwikkeling (SLO)

Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan. Wiskunde 12-16: band 1*. Utrecht, Enschede: Freudenthal instituut, Stichting leerplanontwikkeling (SLO)

Treffers, A. en Moor, E. de (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. en Streefland, L. (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*: *Deel 3: Breuken*. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A., Streefland, L. en Moor, E. de (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3b: Kommagetallen*. Tilburg: Zwijsen.

Tussendoelen en leerlijnen (SLO, 2006. url: http://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-KDRekenenWiskunde.html)

Vos, P. (2007) *Rekenen door Nederlandse tweedeklassers in internationaal perspectief (1982-2003): Zijn de prestaties voor- of achteruit gegaan ?*.

Vos, P. (2007) *Algebraprestaties van tweede-klassers*. Euclides 82 -4, 2007.

Wijers, M., Jonker, V., Huisman, J. e.a. (2007) *Raamwerk rekenen/wiskunde mbo*, Freudenthal Instituut, Utrecht. http://www.fi.uu.nl/raamwerkwiskundembo

Bijlage A

Reken-wiskunderesultaten van leerlingen aan het einde van de basisschool

Advies ten behoeve van de werkgroep rekenen-wiskunde van de Expertgroep Leerlijnen Taal en Rekenen

E.Harskamp
November 2007

1. Aanleiding tot dit advies

De bewindslieden van het ministerie van OCW maken zich zorgen over het reken- en taalniveau van leerlingen in het primair onderwijs, het voortgezet onderwijs en het middelbaar en hoger beroepsonderwijs. De zorg gaat vooral om de overgangen van de ene sector naar de andere. Hierin heeft de overheid een belangrijke verantwoordelijkheid. De minister kan hiertoe kerndoelen vaststellen en voorschrijven of eindtermen vastleggen. Met name voor de overgang van het primair naar het voortgezet onderwijs is het van belang om doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen aan te geven zodat duidelijk wordt wat leerlingen moeten kennen en kunnen op het gebied van reken- en taalvaardigheid (referentieniveaus). Met dit doel is de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Taal ingesteld. Binnen de Expertgroep is een werkgroep Rekenen-wiskunde ingesteld die zich zal bezighouden met voorstelen voor doorlopende leerlijnen voor rekenen en wiskunde. Vraag van de werkgroep Rekenen/wiskunde van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Taal is om een onafhankelijk advies uit te brengen over de stand van het rekenonderwijs door de jaren heen, waarbij wordt nagegaan of en zo ja op welke onderdelen het niveau van de rekenprestaties van leerlingen is gedaald.

In dit advies aan de werkgroep Rekenen en wiskunde zullen de uitkomsten van de Periodieke Peilingen van het Onderwijsniveau (PPON) voor het primair onderwijs een grote rol spelen. Het PPON-materiaal geeft al enige decennia het niveau van rekenen en wiskunde weer van leerlingen aan het einde van de basisschool. Het materiaal laat vergelijkingen toe met voorafgaande jaren op een scala aan rekentoetsen dat representatief is voor hetgeen in de kerndoelen rekenen wiskunde voor het basisonderwijs wordt aangegeven en in de moderne rekenmethodes wordt aangeboden. Vergelijking van de resultaten van leerlingen eind basisonderwijs met die van leerlingen in het buitenland zijn niet goed te maken. Het ontbreekt aan geschikt onderzoeksmateriaal. Er is wel vergelijkend onderzoek gedaan in het voortgezet onderwijs. Het Centraal Panbureau (Minne et al, 2007) constateert naar aanleiding van het PISA-onderzoek naar wiskunde van 15-jarigen in OESO-landen dat gemiddeld genomen het vaardigheidsniveau in Nederland hoog is. Vooral de gemiddelde en zwakke leerlingen doen het in Nederland beter dan in andere geïndustrialiseerde landen. Daarentegen doen onze betere leerlingen (vanaf het 75^{e} percentiel, de kwart best scorende leerlingen) het niet beter dan die in de meeste andere OESO-landen en bevindt Nederland zich qua prestaties van de betere leerlingen in de middenmoot. Uit deze resultaten zou men af kunnen leiden dat vooral de betere leerlingen in het Nederlandse onderwijs onvoldoende ontplooiingskansen krijgen.

2. Achtergronden en specificatie van de adviesvraag

De Expertgroep heeft als taak een schema van aansluitpunten tussen en binnen de verschillende onderwijsvormen, van primair onderwijs tot hoger onderwijs in te vullen. Het schema verbindt de aansluitingspunten met een zestal referentieniveaus, waarbij basiskennis en basisvaardigheden dienen te worden vastgesteld. De Expertgroep is tot een eerste afbakening gekomen (zie Expertgroep doorlopende leerlijnen, 2007). Er zijn drie referentieniveaus en daarbinnen telkens twee zogenoemde kwaliteiten. We bekijken de referentieniveaus die voor dit advies aan de werkgroep Rekenen/ wiskunde van belang zijn. Het gaat om het referentieniveau voor het einde van de basisschool, leeftijdsindicatie: 12-jarigen. Dit referentieniveau kent twee kwaliteiten (niveaus):

Kwaliteit 1.

Dit niveau wordt door een grote groep basisschoolleerlingen gehaald. Het veronderstelde percentage leerlingen wordt door de Expertgroep nog bepaald. Definiëring van deze basiskwaliteit en bepaling van het betreffende leerlingenpercentage worden mede gebaseerd op onderzoek en realistische analyses, aldus de Expertgroep

Kwaliteit 2.

Dit niveau wordt gehaald door een minderheid van de leerlingen die kwaliteit 1 hebben bereikt. Het gaat om leerlingen die wat meer aankunnen dan gemiddeld. Te denken valt aan leerlingen met havo- en vwo-advies van de basisschool.
Kwaliteit 2 is ook de basiskwaliteit voor het einde vmbo (16-jarigen). Dit niveau beperkt zich tot basaal maatschappelijk functionele vaardigheden op het gebied van rekenen/wiskunde.
Kwaliteit 3 wordt in het voortgezet onderwijs gerealiseerd in de theoretische leerweg en in de onderbouw havo/vwo
Voor het einde van het primair onderwijs acht de Expertgroep het ook denkbaar een referentieniveau te formuleren lager dan kwaliteit 1, bijvoorbeeld vergelijkbaar met het niveau aan het einde van het vierde leerjaar in het basisonderwijs voor leerlingen waarvan het vmbo buiten hun bereik ligt. Het gaat met name om een groep laag intelligente leerlingen in basisonderwijs en speciaal basisonderwijs die kwaliteit 1 niet kan halen.
Hoewel de Expertgroep geen melding maakt van huidige groepen die uitstromen uit het primair onderwijs met een bepaalde schoolverwijzingen, lijkt het verstandig om in het advies aan de werkgroep rekenen en wiskunde na te gaan welk niveau van beheersing verschillende uitstromende groepen basisschoolleerlingen binnen de PPON-gegevens hebben. Op die manier kan worden nagegaan hoe groot de verschillen in rekenvaardigheden zijn tussen leerlingen die uitstromen naar basisberoepsgerichte leerweg vmbo tot vwo. Tevens kan worden bezien of de verschillen een verdeling in twee niveaus (kwaliteit 1 en kwaliteit 2) rechtvaardigen zoals de Expertgroep die voor ogen staat.

Naast de context van waaruit de adviesvraag is gesteld is voor dit advies aan de werkgroep Rekenen en wiskunde van belang om na te gaan welke mogelijkheden het materiaal van PPON rekenen biedt. Het peilingonderzoek heeft als doel het periodiek verzamelen van gegevens over het onderwijsaanbod en de onderwijsresultaten in het primair onderwijs voor de algemene maatschappelijke discussie over de inhoud en niveau van het onderwijs. Doordat de peilinginstrumenten in verschillende jaren zijn afgenomen bij vergelijkbare steekproeven uit de populatie van leerlingen in groep 8, zijn veranderingen in ontwikkeling van de opbrengst in de loop van de tijd op te sporen. Rekenpeilingen zijn uitgevoerd in 1987, 1992 , 1997 en 2004. De scores op de opgaven uit de eerste peiling van rekenen-wiskunde uit 1987 zijn minder stabiel en niet goed vergelijkbaar met de scores op de opgaven van 2004. Volgens het Cito komt dat omdat in de loop van de jaren het onderwijs verandert en als gevolg daarvan de eigenschappen van de opgaven mee gaan veranderen. De peilinggegevens van 1992, 1997 en 2004 zijn doorgaans wel vergelijkbaar.
Het Cito heeft bij het trekken van de steekproef rekening gehouden met een evenredige verdeling ten opzichte van de populatie wat betreft: de sociaal economische achtergronden van leerlingen op een school, het formatiegewicht van de leerlingen, het geslacht, de leeftijd en de herkomst.
Er zijn in 2004 in totaal 22 toetsen afgenomen. Door middel van het zogenoemde itemresponse model was het mogelijk te schatten in hoeverre de items een toets vormen (één vaardigheid meten). Als dat zo is kan men de scores van iedere leerling op alle items schatten en hoeven leerlingen niet alle opgaven uit de toetsen te maken maar slechts een selectie daaruit. Per toets is een maatverdeling gekozen zodat de scores tussen de toetsen en tussen de jaren van afname vergelijkbaar worden.
Het meetmodel voor de rekenvaardigheden stelt de onderzoekers in staat om een schatting te maken van de kans die een leerling heeft om een bepaald item in een toets goed te beantwoorden.
Men spreekt van goede beheersing als die kans meer dan 80% is, van matige beheersing als die kans tussen 50% en 80% ligt en van onvoldoende beheersing als die kans onder de 50% ligt. Men kan uitspraken doen over groepen leerlingen. Bijvoorbeeld dit type kind (ingedeeld naar formatiegewicht, sekse of leeftijd) behoort tot een groep die gemiddeld genomen deze toetsopgaven goed beheerst, matig beheerst of onvoldoende beheerst.
Sinds 2004 zijn de leerlingen in de rapportage ook onderverdeeld wat betreft hun keuze voor het voortgezet onderwijs: beroepsgerichte leerweg (BGL, 14 %), kaderberoepsgerichte leerweg (KB, 13%), theoretische en gemengde leerweg (TGL, 31%) en havo/ vwo (HV, 40%). Aan de hand van de PPON- gegevens kan worden nagegaan hoe groot de verschillen in beheersing van toetsopgaven zijn tussen leerlingen met een verwijzing naar verschillende types van voortgezet onderwijs.

Hierboven zijn de mogelijkheden geschetst voor het doen van uitspreken over de rekenniveaus van leerlingen gemeten over verschillende jaren. Tevens is aangegeven welke de mogelijkheden zijn om in de gegevens van 2004 uitsplitsingen te maken naar verschillende groepen leerlingen en om hun beheersingsniveau te vergelijken.
Maar er is meer dan alleen het reguliere basisonderwijs. De PPON heeft als taak een overzicht te geven van het rekenniveau van het gehele primaire onderwijs. Om een totaalbeeld te vormen van dat onderwijs dienen we ook de resultaten van het speciaal basisonderwijs (SBO) in beschouwing te nemen. We zullen daarom eerst de beschikbare gegevens van de PPON voor het speciaal basisonderwijs weergeven en dan de resultaten voor het reguliere basisonderwijs. Dit brede overzicht van resultaten van 12 jarige leerlingen in het primair onderwijs moet ons in staat stellen de adviesvraag over de stand van het rekenonderwijs door de jaren heen en mogelijke zwakke punten in de ontwikkeling van rekenvaardigheden te beantwoorden.

3. PPON Speciaal basisonderwijs

CBS-gegevens over de afgelopen 10 jaar laten zien dat het aantal basisschoolleerlingen de afgelopen jaren is gestabiliseerd naar ronde de 1,550.000. Het aantal leerlingen in het speciaal basisonderwijs is gedaald naar een aantal rond 48.000 (CBS, 2007).
Te samen rond de 1.6 miljoen leerlingen in het primair onderwijs, waarvan 3% het speciaal basisonderwijs bezoekt. Bij de evaluatie van de totale opbrengst van het primair onderwijs dient ook met deze groep rekening te worden gehouden.
In het voorjaar van 1997 is de tweede peiling voor rekenen/ wiskunde in LOM- en MLK-scholen uitgevoerd. Er zijn geen recentere landelijk representatieve gegevens beschikbaar. Toch zijn de gegevens waarschijnlijk niet veranderd. Sinds 1998 zijn de scholen voor kinderen met leer- en opvoedingsmoeilijkheden (LOM) en voor moeilijk lerende kinderen (MLK) ondergebracht in het speciaal basisonderwijs. Maar het gaat nog steeds om de groep kinderen met een laag intelligentieniveau en/of kinderen die grote leerachterstand dan wel gedragsproblemen hebben. Deze kinderen vallen onder de Wet op het Primair Onderwijs, die de regelgeving voor regulier en speciaal basisonderwijs behandelt. Kinderen op het speciaal basisonderwijs dienen na het verlaten van hun school dezelfde basiskennis behaald te hebben als kinderen die op een gewone basisschool gezeten hebben, maar ze mogen daar wel langer over doen.
Het peilingonderzoek uit 1997 in wat nu speciaal basisonderwijs heet, omvat een inventarisatie van enkele aspecten van het onderwijsaanbod en een onderzoek naar de rekenvaardigheid van de 12- en 13-jarige LOM- en MLK-leerlingen. Bij negen van de tien rekentoetsen is de vaardigheid van de leerlingen uit het speciaal onderwijs vergeleken met die van leerlingen in de jaargroepen 4 tot en met 8 van het basisonderwijs. De beschikbare tussendoelen voor de onderbouw van de basisschool bieden een referentiekader om de rekenprestaties van de leerlingen in het speciaal onderwijs te interpreteren. We gaan eerst in op de rekenprestaties van LOM-leerlingen van 12 jaar en zetten daar de prestaties van andere groepen tegen af,

Tellen en getalbegrip.

De gemiddelde 12-jarige LOM-leerling beheerst *de getallen tot 100* min of meer goed en heeft enig inzicht in de getallen en de getallenrij tot 1000. Maar bij de uitbreiding van de getallenwereld tot 1000 ondervindt deze leerling problemen bij het terugtellen met sprongen van 10, het plaatsen van willekeurige getallen in het juiste interval van de getallenrij en bij het verder tellen vanaf een gegeven getal.

Optellen en aftrekken.

De gemiddelde 12-jarige LOM-leerling kan redelijk goed in het gebied tot 100 optellen en beheerst ook elementaire vormen van optellen tot 1000. Deze leerling heeft meer moeite met aftrekopgaven. De leerling heeft een gebrekkig begrip van de betekenis van plaatswaarde en het inwisselen van honderdtallen of tientallen en kan niet goed cijferend rekenen.
Delen. Delen blijkt de moeilijkste bewerking te zijn. Slechts 10% van de 12-jarige LOM-leerlingen kan redelijk goed tot 100 delen. Mogelijke oorzaken van problemen bij deze bewerking zijn gebrekkig inzicht in de structuur van getallen, onvoldoende begrip van de relatie tussen delen en vermenigvuldigen en het geringe aantal parate tafelproducten.

Meten.

De gemiddelde 12-jarige LOM-leerling kan noch de omtrek, noch de oppervlakte van een figuur formeel uitrekenen. Hij kan wel het gewicht van een persoon op een weegschaal correct aflezen en de werkelijke lengte van een op schaal getekend object bepalen met behulp van een eenvoudige schaallijn.

Tijd en geld.

De gemiddelde 12-jarige LOM-leerling kan met kalender en klok en met kleingeld omgaan. Vraagstukken die een beroep doen op het gecombineerd gebruik van geldstukken zijn in de regel te moeilijk, omdat hij de onderliggende getalrelaties niet overziet, met name de relatie tussen 25 en 100, 200 en 250. De LOM-leerling ondervindt problemen in aflees- en rekensituaties, die een beroep doen op het inzicht in de getallen van de klok (30, 45, en 60 als veelvouden van 15; 60 = 12 x 5 of 6 x 10 of 4 x 15).

Het niveau van LOM-leerlingen.

Het gemiddelde niveau van 12-jarige LOM-leerlingen is het beste te vergelijken met het niveau van de gemiddelde leerling eind jaargroep 5. Geschat wordt dat 6% tot 13% van de 12-jarige LOM-leerlingen rekent op het niveau van de gemiddelde leerling eind jaargroep 7.
De 13-jarige LOM-leerlingen bereiken op alle onderwerpen van deze rekenpeiling een vrij hoog eindniveau. Deze leerlingen doen in de regel niet onder voor de leerlingen eind jaargroep 6. Geschat wordt dat ongeveer 10% van deze leerlingen een rekenvaardigheid heeft op het niveau van de gemiddelde leerling eind jaargroep 8 in het basisonderwijs.

Het niveau van de MLK:-leerlingen.

De rekenvaardigheid van 12-en 13-jarige MLK-leerlingen is op de meeste onderwerpen beter dan dat van leerlingen in jaargroep 4, maar zij presteren gemiddeld duidelijk onder het niveau van de leerlingen eind jaargroep 5. De prestaties van deze leerlingen op de onderwerpen Tijd en Geld vallen in positieve zin op: deze zijn vergelijkbaar met die van leerlingen eind jaargroep 5. Waarschijnlijk omdat dit onderwerpen zijn die omwille van de zelfredzaamheid van de kinderen, relatief veel aandacht krijgen in het rekenonderwijs. De meerderheid van de leerlingen kan overigens slechts elementaire rekenhandelingen met kleingeld uitvoeren, kan niet nauwkeurig klokkijken en is nog niet in staat een TV-gids inzichtelijk te raadplegen.

Voorlopige conclusie

De beknopte analyse van de gegevens suggereert dat een grote groep leerlingen in het speciaal onderwijs tijdens de laatste peiling in 1997 het getalsysteem van de subdomeinen Tijd en Geld niet als referentie kan gebruiken, noch voor de organisatie van de getallen, noch voor schattend rekenen, noch voor het inzichtelijk oplossen van rekenopgaven tot 100.
De eindprestaties van de leerlingen in het speciaal onderwijs in het domein Meten zijn zorgwekkend. Gemiddeld genomen overstijgt het niveau van de 12-jarige LOM- en MLK-leerlingen niet het niveau van respectievelijk de leerlingen uit de jaargroepen 5 en 4 in het basisonderwijs. Vooral voor leerlingen uit LOM met normale intelligentieontwikkeling is dat een grote achterstand ten opzichte van de leeftijdgenoten. Een en ander betekent dat grote groepen leerlingen zich met hun bestaande rekenvaardigheden onmogelijk kan redden in betrekkelijk eenvoudige probleemsituaties van het leven van alledag.
Ze zullen daarvoor nog veel moeten leren in het voortgezet (speciaal) onderwijs en het Praktijkonderwijs.
Er is geen reden om aan te nemen dat anno 2007 de rekenresultaten beter zijn dan in de peiling van 1997. De bevindingen van de onderwijsinspectie zijn dat sbo-scholen door de jaren heen vooral veel aandacht besteden aan de sociaal emotionele ontwikkeling van de kinderen, maar dat de begeleiding van de cognitieve ontwikkeling, waaronder het leren lezen en rekenen, te kort schiet. De meeste sbo-scholen gaan nog onvoldoende doelgericht te werk en zijn niet in staat is zich te verantwoorden over het niveau van hun opbrengsten, ..
(Zie Onderwijsinspectie 2002 en 2007).

4. PPON basisonderwijs

Het is niet mogelijk om de PPON-gegevens te evalueren zonder een bepaald standpunt in te nemen. Het PPON rapport uit 2004 biedt verschillende manieren om de data te bezien. Men kan de vaardigheden afmeten aan oordelen van deskundigen over een voldoende vaardigheidsniveau, maar men kan ook vergelijkingen maken van het gemiddeld vaardigheidsniveau over de jaren heen. Het Cito heeft een groep praktijkdeskundigen (leerkrachten groep 8, pabo-docenten en schoolbegeleiders) gevraagd hun oordeel te geven over welke van de toetsopgaven leerlingen einde basisonderwijs goed moeten kunnen maken. De deskundigen hebben per toets standaarden vastgesteld voor drie niveaus van beheersing: minimum beheersing (opgaven die 90% - 95% leerlingen ten minste zouden moeten beheersen), voldoende beheersing (opgaven die 70% - 75% van de leerlingen goed zouden moeten beheersen) en gevorderde beheersing (opgaven die alleen een groep gevorderden zou moeten beheersen en die boven de basisstof uitgaan). De deskundigen hebben in drie ronden met elkaar gediscussieerd over de wenselijke niveaus van beheersing en hebben tot slot inzage gehad in de feitelijk behaalde scores. Nadeel van deze manier van ontlokken van uitspraken bij deskundigen is dat men op deze manier een (inter)subjectief wenselijke situatie krijgt voorgeschoteld. De standaarden zijn niet expliciet gebaseerd op de vereiste entreeniveaus in het vervolgonderwijs en men mag daarom twijfelen aan de validiteit (voorspellende waarde) van de standaarden voor de schoolloopbaan.
Om de huidige stand van zaken te evalueren is een vergelijking van de resultaten uit 2004 met de voorgaande jaren een betere methode. Het gaat dan om objectief vaststelbare voor- of achteruitgang in rekenprestaties van de leerlingenpopulatie einde basisschool in verschillende jaren. De interpretatie van eventuele verschillen vereist zorgvuldigheid. Een voor de hand liggende reden voor verschuiving kan zijn een verschil in nadruk op bepaalde leerstofonderdelen in het rekenonderwijs. In het PPON onderzoek is daarover geen informatie. Maar we weten uit een reeks van onderzoekingen dat verschuiving in nadruk kan leiden tot aanzienlijke verschillen in toetsresultaten (zie Berliner, 1991; Creemers, 1994; Ginsburg et al, 2007))

4.1 PPON-resultaten einde basisschool, door de jaren heen

De resultaten van de periodieke peilingen van 1992, 1997 en 2004 zijn goed met elkaar te vergelijken. Cito heeft de gemiddelde schaalwaarden van de toetsen in 2004 op 250 gesteld met als standaarddeviatie 50. De gemiddelden scores van de andere jaren zijn herberekend ten opzichte van het gemiddelden in 2004.
In het rapport van 2004 worden de gemiddelden van de groep acht-leerlingen uit de steekproeven van de drie peilingjaren per vaardigheid (toets) weergegeven. In tabel 1 wordt een samenvatting gepresenteerd. De vraag is in hoeverre er verschil is tussen de gemiddelde scores van leerlingen in 2004 vergeleken met die in de voorafgaande peilingen. Tabel 1 laat zien dat er op 19 van de 20 toetsen vergelijkingen kunnen worden gemaakt tussen 2004 en 1997. De gegevens van toets 4, 5 , 6 en 22 ontbreken voor 1992. Voor toets 22 zijn ook geen gegevens beschikbaar uit 1997.
Op 13 van de 19 toetsen zijn er in 2004 geen noemenswaardige verschillen ten opzichte van de peiling in 1997. Op 6 toetsen zijn er wel verschillen. We spreken van een noemenswaardig verschil als het verschil tussen twee peilingen groter is dan 20%.

We stellen dit vast met behulp van effectgroottes. Om de effectgrootte tussen twee peilingen te schatten kan men het verschil tussen schaalwaarde 1997 en 2004 delen door 50 (de standaarddeviatie in 2004). Bijvoorbeeld de effectgrootte van toets 1 Getallen en relaties is: (250- 229)/ 50 = .42. Er is dus .42 standaarddeviatie verschil. Er zijn de volgende waarderingen voor effectgrootte: 0.2 = klein effect, 0.5 = matig effect en 0.8 = groot effect (zie pag 225 van het PPON-rapport, 2004).

Opvallend in tabel 1 is dat er bijna op elke toets schommelingen in de prestaties zijn als we de gemiddelde scores van de leerlingen 1997 verlijken met die in 2004. Daar waar de verschillen het noemen waard zijn gaat het slechts in één geval over een groot verschil.

Tabel 1: Gemiddelde schaalwaarden op de 22 rekenvaardigheden van drie opeenvolgende PPON-metingen met 2004 als ijkpunt.

Getallen en bewerkingen

	1992	1997	2004	Relevant verschil 1997/ 2004: (+ = vooruit; - = achteruit)
1. getallen en getalrelaties	222	229	250	+ (klein tot matig)
2. rekendictee: opt. en aftrekken	239	236	250	+ (klein)
3. rekendictee: verm. en delen	260	247	250	0
4. hoofdrekenen: handig opt. en aftrekken	Nvt	250	250	0
5. hoofdrekenen: handig verm. en delen	Nvt	252	250	0
6. hoofdrekenen: schatten	Nvt	247	250	0
7. rekenen: optellen en aftrekken	271	269	250	- (klein tot matig)
8. rekenen: verm. en delen	299	286	250	- (groot)
9. rekenen: samengest. bew.	259	269	250	- (klein tot matig)
10. rekenen met zakrekenmachine	240	254	250	0
Totaal verschil 1997- 2004	Per saldo is er een groot negatief effect			

Verhoudingen, breuken en procenten

	1992	1997	2004	Verschil 1997/ 2004: (+ = vooruit; - = achter uit)
11. verhoudingen	250	256	250	0
12. breuken	249	254	250	0
13. procenten	233	240	250	+ (klein)
14. tabellen en grafieken	nvt	247	250	0
Totaal verschil 1997- 2004	Per saldo is er een klein positief effect			

Meten en meetkunde

	1992	1997	2004	Verschil 1997/ 2004: (+ = vooruit; - = achter ut)
15. meten: lengte	258	255	250	0
16. meten: oppervlakte	235	252	250	0
17. meten: inhoud	258	255	250	0
18. meten: gewicht	237	246	250	0
19. meten: toepassingen	248	257	250	0
20. meetkunde	256	261	250	- (klein)
21. tijd	260	262	250	- (klein)
22. geld	nvt	nvt	250	Nvt
Totaal verschil 1997- 2004	Per saldo is er twee keer een klein negatief effect			

Getallen en bewerkingen

Het Cito constateert dat, bij de toetsen die gaan over bewerkingen (toets 7, 8 en 9), de leerlingen in 2004 minder vaardigheid bezitten dan de leerlingen in 1997. De achteruitgang is vooral groot bij toets 8 die gaat over de bewerkingen vermenigvuldigen en delen. De effectgrootte is: (286 – 250)/50 = .72 standaarddeviatie. Het Cito constateert dat leerlingen vaak het uitrekenpapier niet hebben gebruikt en hebben geprobeerd de opgaven uit het hoofd op te lossen. Dat zou een attitude kwestie kunnen zijn, maar het kan ook zijn dat leerlingen het uitvoeren van bewerkingen gewoon slecht beheersen. Bij sommige opgaven moesten de leerlingen hun uitwerkingen op papier zetten. Bij het nakijken van deze toetsopgaven bleek dat in 2004 zo'n 54% van de leerlingen consistent een strategie gebruikte. Vaak was dat het kolomsgewijs rekenen. Veel leerlingen probeerden een combinatie van strategieën of gaven geen uitwerking maar rekenden uit het hoofd. De leerlingen bleken veel fouten te maken. In 1997 gebruikte 74% van de leerlingen een consistente strategie, meestal het traditionele cijferen en dit leidde vaak tot een correct antwoord. Er werd niet vaak een kolomsgewijze aanpak gebruikt. De achteruitgang in bekwaamheid op het gebied van cijferen zou dus voor een deel aan de gehanteerde cijferdidactiek kunnen liggen. De gegevens die het Cito verzamelde over het onderwijsaanbod (hoofdstuk 3 van het rapport PPON, 2004) laten zien dat de leerkrachten in de bovenbouw vaak het cijferend optellen, aftrekken en vermenigvuldigen aanleren, nadat kinderen in de middenbouw (groep 6) dit eerst kolomsgewijs hebben geleerd. Maar veel leerkrachten in de bovenbouw laten ook beide strategieën door elkaar gebruiken. Het delen blijft in de bovenbouw vaak kolomsgewijs met soms keuze uit staartdelen (cijferen) en kolomsgewijs rekenen. Het lijkt met andere woorden in de praktijk te ontbreken aan een consistent uitgevoerde didactiek voor de bewerkingen. Daarbij moet worden opgemerkt dat het kolomsgewijs rekenen bij leerlingen vaker tot fouten leidt dan het cijferend rekenen. Het is van daaruit wellicht begrijpelijk waarom leerkrachten van de bovenbouw naar het traditionele cijferen grijpen en de realistische didactiek op dit punt laten voor wat die is.

Verhoudingen, breuken en procenten

In dit domein, bestaande uit 4 toetsen, is er alleen een kleine verschuiving opgetreden bij de toets Procenten. Er is een klein positief effect voor peiling 2004. De Cito-onderzoekers constateren op basis van individueel afgenomen toetsopgaven dat in 2004 meer leerlingen gebruik maken van een efficiënte manier om tot een oplossing van procentopgaven te komen en dat leerlingen daarom meer opgaven goed maken. Er wordt niet alleen gebruik gemaakt van het eerst uitrekenen van 1%, maar er worden ook andere, handige manieren gebruikt als dat van pas komt.
Per saldo zien we bij dit onderdeel een lichte verbetering die is toe te schrijven aan het beter leren uitrekenen van opgaven over procenten

Meten en Meetkunde

Het domein Meten en meetkunde bestaat uit 8 toetsen. Op twee toetsen is er een kleine achteruitgang vergeleken bij eerdere peilingen. Het gaat om de toetsen Meetkunde en Tijd.
Bij Meetkunde gaat het vooral om aanzichten (ruimtelijke situaties, gebouwen etc) en constructies (bouwplaten). De opgaven zijn voor het grootste deel met dezelfde strategie op te lossen: 'bepaal de kijkrichting en in hoeverre de objecten voor- of achteraf staan en bepaal of de objecten links dan wel rechts staan vanuit die kijkrichting gezien'. De strategie kan vanaf de onderbouw worden geoefend en leerlingen kunnen al jong met deze strategie worden vertrouwd gemaakt. Er wordt door de onderzoekers geen verklaring geleverd voor de afname in vaardigheid. We houden het er voorlopig op dat er in het onderwijs de laatste jaren minder aandacht aan dit onderdeel is geschonken.
Bij Tijd gaat het om het kunnen rekenen met uren, minuten en seconden, digitale en analoge tijdsaanduiding, met de kalender rekenen en rekenen met de relatie tijd en geld. Dit zijn onderwerpen die vanaf groep 5 en 6 regelmatig moeten worden geoefend.

Voorlopige conclusie

De vergelijking van toetsresultaten overziende kunnen we concluderen dat in het domein Getallen en bewerkingen op vijf van de tien toetsen er geen veranderingen zijn tussen 2004 en 1997. Op de vijf overige toetsen zijn er wel veranderingen.
De leerlingen in 2004 scoren wat beter op de toetsen Getallen en getalrelaties en Rekendictee optellen en aftrekken dan de leerlingen in 1997. Ze scoren slechter op de drie toetsen die gaan over het uitvoeren van bewerkingen. Men kan stellen dat per saldo enige voor- en achteruitgang is te bespeuren in de prestaties op de verschillende toetsen, maar dat er vooral een grote achteruitgang is in cijferend vermenigvuldigen en delen. Opvallend is dat de verbetering in getallen en relaties en hoofdrekenen niet gepaard gaat met beter gebruik van de zakrekenmachine. Immers, bij inzichtelijk gebruik daarvan is het schatten en interpreteren van uitkomsten een voorwaarde. Voor het domein Verhoudingen, breuken en procenten is er op een van de vier toetsen een kleine vooruitgang te constateren en lijken leerlingen beter te kunnen rekenen met procenten. In het domein van Meten en Meetkunde is er op twee van de acht toetsen een kleine achteruitgang te bespeuren. Leerlingen hebben minder ruimtelijke vaardigheden en minder vaardigheden in tijdrekenen dan voorheen.
Een mogelijke verklaring voor de wisselingen in presteren van leerlingen zou kunnen zijn dat in het rekenonderwijs minder tijd en aandacht dan in voorgaande jaren wordt besteed aan bepaalde leerstofonderdelen en meer aan andere onderdelen.

4.2 Prestaties van groepen uitstromende leerlingen in 2004

Tabel 2 geeft een overzicht van de prestaties van groepen leerlingen die uitstromen naar verschillende typen voortgezet onderwijs. Het Cito heeft per 2004 voor het eerst deze uitsplitsing gemaakt en deze is erg verhelderend. De groepen leerlingen zijn:
basisberoepsgerichte leerweg (BGL), kaderberoepsgerichte leerweg (KB) theoretische en gemengde leerweg (TGL) en havo en vwo (H/V). Van te voren is bekend dat er aanzienlijke verschillen zijn tussen deze groepen leerlingen. We geven hier een indruk van hoe groot die verschillen zijn. In dit advies wordt geen analyse gemaakt van hetgeen de vereisten zijn in de typen vervolgonderwijs, maar er wordt vanuit het behaalde vaardigheidsniveau van de laagste en de hoogste groep gekeken welke niveau is bereikt.
Om een indruk te geven van het behaalde niveau is per groep gekeken naar hoeveel van de voorbeeldopgaven uit het PPON-rapport van 2004 door de groep leerlingen gemiddeld genomen goed wordt beheerst. Onder goede beheersing wordt verstaan dat er een kans van meer dan 80% is dat de leerlingen de opgave correct oplossen. Bij een dergelijke mate van beheersing mag men verwachten dat de vaardigheid zal beklijven en dat leerlingen op dit niveau de brugklas zullen instromen. Daarom is er voor gekozen uit te gaan van het gemiddelde aantal goed beheerste voorbeeldopgaven van de groepen. Het PPON rapport geeft niet alleen aan hoeveel opgaven worden beheerst door de vier groepen uitstromende leerlingen, maar ook welke opgaven. Op die manier kan de lezer concluderen welke typen opgaven verschillende groepen goed beheersen.

Getallen en bewerkingen

Tabel 2 laat zien dat gemiddeld genomen (zie de rij Totaal gemiddelde) de BGL-leerlingen 22% van de opgaven goed beheersen, voor de KB-leerlingen is dat 35%, voor de TGL-leerlingen 46% en voor de H/V leerlingen 71%. Er zijn dus zeer grote verschillen tussen de groepen leerlingen.
Wat betekenen die verschillen in beheersing van concrete opgaven? We stellen de uitersten tegenover elkaar.
De *BGL-leerling* beheerst doorgaans de plaatswaarde in hele getallen en kommagetallen tot duizendsten, kan uit het hoofd optellen en aftrekken met mooi afgeronde getallen en kommagetallen, kan sommige tafels toepassen op sommen met nullen

Tabel 2: Percentage van voorbeeldopgaven dat leerlingen die uitstromen naar verschillende typen voortgezet onderwijs goed beheersen (meer dan 80% kans op goed) in 2004

Getallen en bewerkingen

	BGL	KB	TGL	H/V
1. getallen en getalrelaties	30	37	53	80
2. rekendictee: opt. en aftrekken	73	87	97	100
3. rekendictee: verm. en delen	37	73	83	93
4. hoofdrekenen: handig opt. en aftrekken	28	56	61	83
5.hoofdrekenen: handig: verm. en delen	22	39	44	78
6. hoofdrekenen: schatten	19	23	44	81
7. rekenen: optellen en aftrekken	0	0	38	67
8. rekenen: verm. en delen	0	17	17	50
9. rekenen: samengest. bew.	0	7	7	33
10. rekenen met zakrekenmachine	7	7	13	47
Totaal gemiddeld	22	35	46	69

Verhoudingen, breuken en procenten

	BGL	KB	TGL	H/V
11. verhoudingen	13	20	50	83
12. breuken	17	30	57	83
13. procenten	10	17	40	60
14. tabellen en grafieken	0	8	33	50
Totaal gemiddeld	10	19	45	69

Meten en meetkunde

	BGL	KB	TGL	H/V
15. meten: lengte	5	17	33	44
16. meten: oppervlakte	0	5	5	50
17. meten: inhoud	0	0	17	50
18. meten: gewicht	0	17	39	72
19. meten: toepassingen	13	25	38	72
20. meetkunde	8	25	25	50
21. tijd	20	33	47	73
22. geld	8	33	42	67

(8 x 90=); maar deze leerling heeft grote moeite met handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen (50 – 7,50 of 6 x 6,98), schatten (1846: 46= 40130435 plaats van de komma), beheerst het uitvoeren van de hoofdbewerkingen totaal niet en kan nauwelijks een opgave maken met de rekenmachine (rond af op twee cijfers achter de komma: 57: 7=).
De *H/V-leerling* beheerst de meeste opgaven uit de tien toetsen goed maar heeft nog problemen met drie toetsen: Rekenen vermenigvuldigen en Rekenen delen, Samengestelde bewerkingen en Rekenen met de zakrekenmachine. Over de mogelijke oorzaken van de zwakke beheersing van opgaven uit de eerste twee toetsen hebben we hiervoor gesproken. Op de toets Rekenen met de rekenmachine beheersen de H/V-leerlingen de eerste helft van de opgaven goed. Het gaat om eenvoudige tekstopgaven waarbij een of twee rekenstappen (gasmeterstanden op twee data vergelijken) zijn vereist. Zodra de tekstopgaven meer bewerkingsstappen vragen neemt de beheersing van de H/V-leerlingen af. Dit fenomeen doet zich ook voor bij de toets Samengestelde bewerkingen.
Het Cito is door middel van mondelinge individuele afnames bij een drietal opgaven de oplossingswijze nagegaan. Het blijkt dat slechts weinig leerlingen de verschillende stappen in één keer in een bewerking kunnen zetten en kunnen intypen in de rekenmachine. Vele leerlingen rekenen stap voor stap een opgave uit op de zakrekenmachine en de helft van de leerlingen gebruikt geen zakrekenmachine maar rekent met de hand of uit het hoofd. Dit leidt meestal niet tot goede antwoorden.
Omdat de H/V-leerlingen de meeste andere toetsen goed beheersen lijkt hier sprake te zijn van het slecht analyseren van de tekstopgave en niet goed weten hoe meerdere bewerkingen uit te voeren met de rekenmachine en de uitkomsten (schattend) te controleren. Leerlingen zijn kennelijk niet getraind in het zorgvuldig lezen en het analyseren van de probleemsituatie en het maken van een oplossingsplan. Men zou kunnen vermoeden dat de probleemoplossende vaardigheden ook bij de H/V-leerlingen naar verhouding zwakker ontwikkeld zijn dan de rekenvaardigheden zoals het inzicht in getallen, het handig hoofdrekenen en het schattend rekenen.

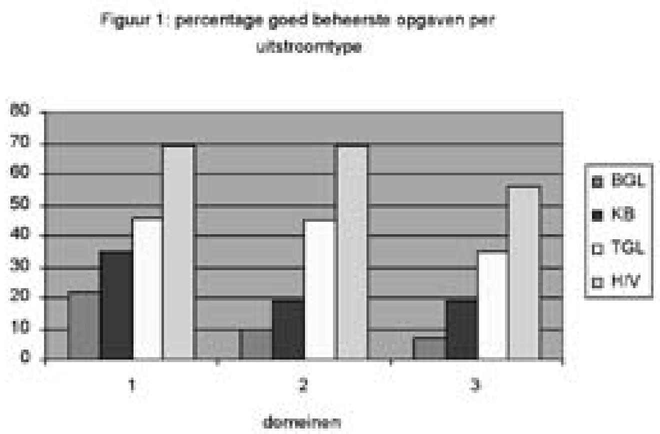
Verhoudingen, breuken en procenten

Dit onderwerp is al jarenlang een struikelblok voor vele leerlingen. Er zijn vier toetsen. De *BGL-leerling* beheerst doorgaans slechts enkele van de opgaven per toets. Gemiddeld beheersen BGL- leerlingen ongeveer 10% van de opgaven in dit domein. De BGL-leerling kan: eenvoudige verhoudingen uitrekenen (15 pannenkoeken met 2 eieren maken; dan zijn er voor 45 pannenkoeken … eieren nodig), eenvoudige breuken toepassen (een kwart van 240 cm,), eenvoudig procentrekenen (50% van een bedrag). De leerlingen beheersen geen van de opgaven waar het gaat om tabellen en grafiek aflezen
De H/V-leerlingen beheersen de meeste opgaven uit de toetsen voor verhoudingen, breuken en procenten goed. Gemiddeld beheersen de H/V-leerlingen 69% van de opgaven in dit domein. Leerlingen gebruiken verschillende strategieën om de opgaven op te lossen. Dit is opvallend omdat één strategie: 'het gebruik van de verhoudingstabel' in bijna alle opgaven efficiënt kan worden toegepast. Voor de verhoudingstabel is echter nodig dat de leerlingen de opgave in één keer aanpakken. Nu werken leerlingen graag met strategieën die de oplossing 'stukje bij beetje' dichterbij brengt. Ook de H/V-leerlingen blijken niet altijd de meest efficiënte strategie te kiezen.Maar, ze beheersen de opgaven vaak wel. De opgaven over procenten en tabellen en grafieken beheersen de H/V-leerlingen minder vaak. Bij de toets Procenten gaat het om opgaven waarbij flexiebel met deel en geheel moet worden gerekend (2% van de auto's is bij controle aangehouden; dat waren 1424 auto's; hoeveel auto's zijn er gecontroleerd?). Bij de toets Tabellen en grafieken gaat het vooral om het nauwkeurig analyseren van de gegevens in een context opgave met visuele en verbale informatie. Die vaardigheid blijken de H/V leerlingen bij slechts de helft van de opgaven te beheersen.

Meten en meetkunde

Er zijn acht toetsen. De beheersing van de meeste toetsopgaven door *de BGL-leerlingen* is opvallend zwak. Gemiddeld beheersen de leerlingen slechts 7% van de opgaven uit de acht toetsen.
Op het gebied van meten van lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht beheersen de leerlingen vrijwel geen enkele opgave goed. Het komt er op neer dat het metriekstelsel (km, m, cm mm) onvoldoende wordt beheerst en niet kan worden toegepast. Het bedekken en berekenen van oppervlakte met deze maten kan niet worden uitgevoerd, het meten van inhoud met liter, cl en ml is een groot probleem evenals het uitrekenen van de inhoud van voorwerpen met kubieke maten, De maten kg, g, mg kennen de BGL-leerlingen onvoldoende. De leerlingen kunnen hun aanwezige vaardigheden op het gebied van meten slechts in enkele opgaven toepassen in praktische situaties. Het ruimtelijk meetkundig inzicht en het rekenen met geld van de BGL-leerlingen is zwak (8% van de opgaven worden goed beheerst). Met de beheersing van de opgaven van de toets Tijd is het iets beter gesteld. De BGL-leerlingen beheersen klokkijken en eenvoudige berekeningen met uren en minuten.
De *H/V-leerlingen* beheersen gemiddeld 56% van de toetsopgaven goed op het gebied van meten en meetkunde. Bij de toets Lengte beheersen de leerlingen slechts 44% van de opgave goed.
Opgaven die niet goed worden beheerst vragen voornamelijk om herleidingen in het metriekstelsel (km <-> m en cm <-> mm en m <-> mm). Uit de mate van beheersing van opgaven uit de toetsen Oppervlakte en Inhoud blijkt verder dat de formules voor berekening van inhoud en oppervlakte niet voldoende worden beheerst (hoeveel tapijttegels van 50cm x 50 cm nodig voor een lokaal van 9m bij 5m? Wat is de inhoud van een huis dat 9 m lang, 5 m breed en 6 m hoog is?). Meten met gewichten, geldrekenen en klokkijken wordt doorgaans door de H/V-leerlingen goed beheerst.

Voorlopige conclusie
In onderstaande grafiek zijn voor de drie leerstofdomeinen van de toetsen de gemiddelden weergegeven van de vier groepen leerlingen (vier uitstroomtypen).



1= getallen en bewerkingen,
2= verhoudingen, breuken en procenten
3= meten en meetkunde

De grafiek laat zoals verwacht zien dat leerlingen uit de vier groepen onderling vier verschillende prestatietypen vertegenwoordigen. Verrassender is dat de groepen de minste opgaven goed beheersen van het domein Meten en meetkunde. Dit is het domein dat zich bij uitstek leent om de leerstof aanschouwelijk te maken en in te bedden in realistische contexten. De resultaten zijn echter minder goed dan bij de andere domeinen. In vergelijking met vorige jaren is er slechts op twee van de acht toetsen van het domein meten en meetkunde een kleine achteruitgang. We moeten constateren dat het minder goed presteren in dit domein een verschijnsel is dat al jaren stand houdt. Men kan concluderen dat de meest opvallende achteruitgang in het domein Getallen en bewerkingen ligt (met name de hoofdbewerkingen toepassen), maar de geringste beheersing van vaardigheden ligt in het domein Meten en meetkunde.
Als we kijken naar de verschillen tussen de vier groepen die uitstromen uit het basisonderwijs dan valt het volgende op.
De *BGL-leerlingen* beheersen doorgaans de plaatswaarde in hele getallen en kommagetallen tot duizendsten, het uit het hoofd optellen en aftrekken met mooi afgeronde getallen. Deze leerlingen hebben echter grote moeite met handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen, beheersen het uitvoeren van de hoofdbewerkingen totaal niet en kunnen nauwelijks een opgave maken met de zakrekenmachine. Ze beheersen doorgaans wel het werken met eenvoudige verhoudingen, eenvoudige breuken en eenvoudige procenten. De BGL-leerlingen kunnen geen tabellen en grafiek aflezen Op het gebied van meten van lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht beheersen de leerlingen vrijwel geen enkele opgave goed. Datzelfde geldt voor meetkunde en geldrekenen. Over het geheel genomen is de startkwalificatie op het gebied van het domein Meten en meetkunde onder de maat voor leerlingen die naar het voorbereidend middelbaar beroepsonderwijs worden geleid.
Met name op het gebied van meten, metriekstelsel, geldrekenen, de zakrekenmachine en ruimtelijk inzicht zullen deze leerlingen nog veel moeten leren om het rekenen voor een beroep aan te kunnen (zie Stichting van de Arbeid, 2007).
De *H/V leerlingen* hebben over het algemeen een goede beheersing van de vaardigheden die worden getoetst. Enkele opvallen zwakke punten zijn:de vermenigvuldig- en deelbewerkingen en de samengestelde bewerkingen, het reken met de zakrekenmachine, het lezen van tabellen en grafieken, meten van lengte, oppervlakte en inhoud en ruimtelijke meetkunde. Bij deze vaardigheden beheersen de H/V-leerlingen 50% of minder van de opgaven goed.

5. Slotconclusie en discussie

Stand van zaken rekenvaardigheden

We beginnen met de hoofdvraag voor dit advies: In hoeverre is er sprake van achteruitgang in reken-wiskundevaardigheden van leerlingen?
Uit de vergelijking van toetsresultaten van leerlingen eind groep 8 tussen 2004 en 1997 kunnen we concluderen dat in het domein Getallen en bewerkingen op vijf van de tien toetsen er geen veranderingen zijn. Op de vijf overige toetsen zijn er wel veranderingen. Per saldo is er vooral een grote achteruitgang in cijferend vermenigvuldigen en delen. Nu zou men kunnen denken dat een achteruitgang in het kunnen uitvoeren van de hoofdbewerkingen niet zo onverwacht is. Immers, blijkens de Cito-gegevens in de PPON-peilingen gebruiken leerkrachten door de jaren heen meer en meer de zakrekenmachine in hun onderwijs. Maar, het blijkt dat de leerlingen geen beter gebruik van de zakrekenmachine gaan maken. Leerlingen kunnen minder goed rekenen dan vroeger, maar zijn niet meer bedreven in het gebruik van de zakrekenmachine voor het oplossen van toepassingopgaven die veel rekenwerk vragen. De achteruitgang in rekenvaardigheid wordt niet gecompenseerd.
In het domein Verhoudingen, breuken en procenten is er op een van de vier toetsen een kleine vooruitgang te constateren. De leerlingen kunnen wat beter rekenen met procenten dan bij de vorige peiling. In het domein van Meten en Meetkunde is er op twee van de acht toetsen een kleine achteruitgang te bespeuren. Leerlingen hebben minder ruimtelijke vaardigheden en minder vaardigheden in tijdrekenen dan voorheen.
Terugkomend op de vraag of er achteruitgang in het reken-wiskundevaardigheid van leerlingen is te bespeuren kan worden gesteld dat er vooral een achteruitgang is in het toepassen van de hoofdbewerkingen. Ernstig is het algehele lage vaardigheidsniveau in het domein Meten en meetkunde dat al jarenlang voortduurt. Veel leerlingen kennen de herleidingen in het metriekstelsel blijkbaar niet (km <-> m en cm <-> mm en m <-> mm) en zijn niet in staat om berekeningen voor omtrek, oppervlakte en inhoud met succes uit te voeren.

Verklaringen voor verschillen in effect van nationaal onderwijs kunnen doorgaans worden gevonden in de vraag hoe er wordt onderwezen en wat wordt onderwezen (Grouws en Cebulla, 2000; Ginsburg et al, 2007). In dit geval gaat het voor de verklaring van de wisselingen in presteren van leerlingen om de rekendidactiek die in de scholen wordt toegepast en om het leerstofaanbod van de scholen.
De didactiek van de rekenbewerkingen blijkt nu vaak een combinatie te vormen van realistische didactiek (kolomsgewijs rekenen) en traditionele didactiek (cijferen) in groep 6, 7 en 8 van de basisschool. Bij het leren uitvoeren van bewerkingen levert dit slechte resultaten. Er zijn in het PPON-onderzoek van 2004

aanwijzingen dat het kolomsgewijs rekenen bij leerlingen tot meer fouten aanleiding geeft dan het cijferend rekenen. Daar staat tegenover dat in experimenteel onderzoek naar het toepassen van verschillende rekendidactiek voor het optellen en aftrekken tot 100 bij leerlingen uit het speciaal onderwijs er geen eenduidige onderzoeksuitkomsten zijn over welke strategie het meest effectief is. Van Luit (1987) toonde aan dat systematisch leren cijferen effectiever is dan het bestaande rekenonderwijs. Harskamp en Suhre (1996) lieten zien dat het consistent leren hanteren van een kolomsgewijze of rijgmethode effectiever is dan de bestaande praktijk en Milo (2003) rapporteert dat het consistent leren gebruiken van de rijgmethede iets effectiever is dan de kolomsgewijze aanpak, maar vooral effectiever dan leerlingen zelf een oplossingsstrategie laten kiezen. Gemeenschappelijk hebben deze onderzoeken als uitkomst dat een consistente didactiek voor het leren uitvoeren van bewerkingen beter is dan de bestaande praktijk en het kinderen zelf een strategie laten kiezen. Kinderen verschillende strategieën naar keuze door elkaar laten gebruiken, zoals de realistische didactiek dat voorstaat, is niet aan te raden (Harskamp, 2004). Het is daarentegen aan te bevelen een consistente didactiek voor het uitvoeren en toepassen van bewerkingen te hanteren in groep 6, 7 en 8 van de basisschool.

Een andere aanvullende verklaring voor de wisselingen in presteren van leerlingen zou kunnen zijn dat in het rekenonderwijs in groep 6, 7 en 8 minder tijd en aandacht dan in voorgaande jaren wordt besteed aan bepaalde leerstofonderdelen (zoals het leren uitvoeren van bewerkingen, meetkunde en tijdrekenen) en meer aan andere onderdelen (zoals getallen en getalrelaties en procenten). Harskamp en Suhre (1994) lieten zien dat de tijd besteed aan bepaalde onderdelen van het rekenen in de bovenbouw van de basisschool en de hoeveelheid leerstof die leerlingen per week verwerken, onafhankelijk van het aanvangsniveau van leerlingen, belangrijke voorspellers zijn voor de rekenprestaties aan het einde van de basisschool. Jammer genoeg ontbreken gegevens over het gerealiseerde aanbod in het onderwijs op de terreinen van de verschillende toetsen in de PPON-peilingen. Het is niet mogelijk om de getoetste leerstof te vergelijken met de onderwezen leerstof. Voor de discussie over waardoor de tamelijk grote tot grote verschillen in toetsresultaten tussen de peilingen worden veroorzaakt zou in de toekomst naast de PPON-peilingen flankerend onderzoek moeten worden gedaan op de scholen naar hun feitelijk onderwijsaanbod.

Verschillen tussen groepen leerlingen in relatie tot instroomeisen voortgezet onderwijs

De volgende vraag die we proberen te beantwoorden is in hoeverre groepen die verschillen in verwijzing naar het voortgezet onderwijs verschillen in rekenniveau.
We beginnen bij de leerlingen in het speciaal basisonderwijs. Het laatste peilingonderzoek uit 1997 laat zien dat gemiddeld genomen het niveau van de 12- en 13-jarige LOM- en MLK-leerlingen doorgaans niet het niveau van respectievelijk de leerlingen uit de jaargroepen 5 en 4 in het basisonderwijs overstijgt. Sommige leerlingen uit het LOM met normale intelligentieontwikkeling kunnen de achterstand beperken tot eind groep 7 van de basisschool, maar over het geheel genomen hebben de leerlingen van het speciaal basisonderwijs een te grote achterstand ten opzichte van hun leeftijdgenoten in het basisonderwijs en voldoen de sbo-scholen niet aan de doelstellingen uit de Wet Primair Onderwijs. Het betekent dat grote groepen leerlingen zich met hun bestaande rekenvaardigheden onmogelijk kunnen redden in probleemsituaties van het leven van alledag. Ze zullen daarvoor nog veel moeten leren in het voortgezet (speciaal) onderwijs en het Praktijkonderwijs.
Wat betreft de leerlingen in het basisonderwijs kan een onderscheid worden gemaakt naar vier groepen: leerlingen die de beroepsgerichte leerweg (BGL) kiezen, leerlingen die de kaderberoepsgerichte leerweg (KB) kiezen, leerlingen die de theoretische en gemengde leerweg (TGL) kiezen en leerlingen die havo/vwo (HV) kiezen. Aan de hand van de PPON- gegevens kan worden nagegaan hoe groot de verschillen in beheersing van toetsopgaven zijn tussen leerlingen met een verwijzing naar verschillende types van voortgezet onderwijs.
Figuur 1 laat zien dat er grote verschillen zijn tussen de vier uitstroomgroepen. We bekeken al eerder de prestaties van de meest extreme groepen: BGL-leerlingen en H/V-leerlingen.
De BGL-leerlingen beheersen doorgaans de plaatswaarde in hele getallen en kommagetallen en kunnen uit het hoofd optellen en aftrekken met mooi afgeronde getallen. Ze kunnen werken met eenvoudige verhoudingen, breuken en procenten. Deze leerlingen hebben echter grote moeite met handig rekenen, de hoofdbewerkingen en de zakrekenmachine. Ze kunnen geen tabellen en grafieken aflezen en niet rekenen met lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht. Datzelfde geldt voor meetkunde en geldrekenen. Over het geheel genomen is de startkwalificatie van deze leerlingen voor het voorbereidend middelbaar beroepsonderwijs niet goed. Ze zullen nog veel moeten bijleren om het rekenen voor een beroep aan te kunnen.
De H/V leerlingen hebben over het algemeen een goede beheersing van de vaardigheden die worden getoetst. Enkele opvallende zwakke punten zijn: het toepassen van de vermenigvuldig- en deelbewerkingen en de samengestelde bewerkingen, het probleemoplossend rekenen met de zakrekenmachine, het lezen van tabellen en grafieken, meten van lengte, oppervlakte en inhoud en ruimtelijke meetkunde. Bij deze vaardigheden beheersen de H/V-leerlingen 50% of minder van de opgaven goed. Voor de H/V-leerlingen geldt dat zij op een aantal rekenwiskundevaardigheden achterblijven in hun ontwikkeling.
Aangezien het deze leerlingen niet aan capaciteiten ontbreekt en zij andere reken-wiskundevaardigheden behoorlijk onder de knie hebben gekregen, moet de oorzaak van deze hiaten in het onderwijs worden gezocht. Niet alleen voor de zwakste rekenaars, maar ook voor de beste rekenaars valt er door beter uitgebalanceerd onderwijs veel te winnen. De constatering van het CPB (Minne et al, 2007) op grond van het PISA-wiskundeonderzoek dat Nederland vooral achterblijft in de reken-wiskundeprestaties van de kwart beste 15-jarge leerlingen, kan mede door de genoemde zwakten in reken-wiskundevaardigheden en probleemoplossende vaardigheden vanuit het basisonderwijs worden veroorzaakt.

Bovenstaande profielen van vier groepen leerlingen ingedeeld in uitroom naar het voortgezet onderwijs, vraagt om een analyse van het wenselijk niveau van de leerlingen gezien tegen het licht van de leerstofeisen en vaardigheidseisen die het voortgezet onderwijs stelt. Wij zullen deze analyse hier niet geven, maar grijpen terug op de indeling naar kwaliteiten zoals voorgesteld door de Expertgroep. De Expertgroep onderscheidt :
kwaliteit 1 voor de grote groep leerlingen en kwaliteit 2 voor bovengemiddeld presterende leerlingen. Met de mogelijkheid een kwaliteit te formuleren voor leerlingen uit het speciaal basisonderwijs.
De gegevens die wij hebben laten zien maken duidelijk dat de diversiteit zowel binnen het speciaal onderwijs als binnen het basisonderwijs groot is. Het lijkt niet goed mogelijk om alle leerlingen aan het einde van het primair onderwijs te laten voldoen aan een van de drie niveaus: speciaal, kwaliteit1 of kwaliteit 2. Zoals de gegevens er nu uitzien lijkt de volgende indeling meer voor de hand te liggen:
- uitstroom naar vso: kwaliteit speciaal niveau
- uitstroom naar vmbo: BGL en KB: kwaliteit elementair niveau
- uitstroom naar vmbo TGL: kwaliteit basisniveau
- uitstroom naar havo of vwo: kwaliteit streefniveau

We geven een korte toelichting.
De meeste leerlingen uit het so zullen doorstromen naar vso. Maar vooral onder de vroegere LOM-leerlingen zit een grote groep normaal intelligente kinderen met gedragsproblemen die bij een juist onderwijsaanbod in het sbo kan doorstromen naar niveaus van het vmbo of zelfs naar havo. Het speciaal niveau van rekenen einde primair onderwijs zou moeten worden gereserveerd voor kinderen met een intelligentieachterstand of zeer zware gedragsproblematiek die het leren zeer moeilijk maakt.
Het elementair niveau is voor leerlingen die uitstromen naar BGL en KB. Hoewel figuur 1 laat zien dat de verschillen in vaardigheden tussen leerlingen die naar BGL en KB gaan groot zijn, is er toch voor gekozen deze leerlingen in het elementair niveau samen te brengen. Het niveau van de BGL leerlingen moet omhoog. Het niveau van deze leerlingen is te laag (ongeveer niveau basisstof groep 6) om met goed gevolg het rekenen en wiskunde van het vmbo te kunnen volgen. In het vmbo wordt nu veel van de basisschoolleerstof kort herhaald, maar de rekenproblemen blijven vaak en de leermotivatie van de leerlingen om de stof nog eens over te doen is een probleem. De overige niveaus zijn wat indeling naar mate van rekenvaardigheid betreft minder problematisch en de niveaus sluiten aan bij de indeling die de Expertgroep voor ogen heeft.
In dit advies is getracht een genuanceerd beeld te geven van de stand van het rekenniveau van leerlingen eind groep 8 van de basisschool. Het advies levert indicaties voor een indeling in eindniveaus van het primair onderwijs voor verschillende groepen leerlingen die naar vso en vo doorstromen.

Literatuur

- Berliner, D. (1991). What's all the fuss about instructional time? In M. Ben-Peretz & R. Bromme (Eds.), *The nature of time in schools: Theoretical concepts, practitioner perceptions*. New York: Teachers College Press.
- Expertgroep doorlopende leerlijnen (2007) *Eerste deeladvies van de Expertgroep Doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen/ wiskunde.* Enschede: SLO
- CBS (2007) *Jaarboek Onderwijs in Cijfers 2007.* Voorburg: Centraal Bureau voor de Statistiek
- Creemers, B.P.M. (1994) *The effective classroom*. London: Cassell
- Ginsburg, A., Cooke, G, Leinwand, S., Noell, J. & Pollock, E. (2007) *Reassessing U.S. International Mathematics Performance: New Findings from the 2003 TIMSS and PISA.* Washington: American Institutes for Research
- Grouws, D. A. & Cebulla, K. J. (2000) *Improving Student Achievement in Mathematics, Part 1: Research Findings. ERIC Digest. http://www.ericdigests.org/2003-1/math2.htm*
- Harskamp, E. and Suhre, C. (1994) *Assessing the Opportunity to Learn Mathematics.* Evaluation Review, 18, 627-642
- Harskamp, E & Suhre, C. (1996) Hoofdrekenen tot honderd op maat. *Tijdschrift voor Orthopedagogiek, 35, 115 – 130*
- Harskamp, E. (2004) *Analyseren en verhelpen van rekenproblemen*. Groningen: GION
- Inspectie van het onderwijs (2002) *De kwaliteit van het speciaal basisonderwijs.* Utrecht: Onderwijsinspectie
- Inspectie van het onderwijs (2007) *De Staat van het Onderwijs. Onderwijsverslag 2005/ 2006.* Utrecht: Onderwijsinspectie
- Janssen, J, Schoot van der F. en Hemker, B. (2004) *Balans van het rekenwiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2004.* Arnhem: Cito
- Luit, H. van (1987) *Rekenproblemen in het speciaal onderwijs.* Nijmegen: KU (proefschrift)
- Milo, B.F.(2003) *Math instruction for special-needs students. Effects of instructional variants in addition and subtraction up to 100.* Leiden: University (proefschrift)
- Minne, B, Rensman, M, Vroomen, B., Webbink, D. (2007) Excellence for Productivity? *Bijzondere publicatie 69*, Den Haag: CPB
- Stichting voor de Arbeid (2007) *Convenant tussen werkgevers, werknemers en overheid,* Structurele aanpak laaggeletterdheid in de samenleving en het bedrijfsleven 2007 – 2015. http://www.taalkrachtvoorgemeenten.nl/files/Algemeen/convenant%20stichting%20van%20de%20arbeid.pdf

Bijlage B

Rekenen door Nederlandse tweedeklassers in internationaal perspectief (1982-2003): zijn de prestaties voor- of achteruit gegaan ?

dr F.P. (Pauline) Vos

Rapport voor de Expertgroep
'Doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen/wiskunde'

eindversie
oktober 2007

Samenvatting

In dit rapport is gekeken naar het niveau van rekenen van leerlingen in de tweede klas van het voortgezet onderwijs in internationaal perspectief. Door gebruik te maken van internationaal vergelijkende toetsen, zoals TIMSS[1], kan men de prestaties ijken op omringende (en andere) landen. In dit rapport is deze vergelijking van landenscores op het rekenen over een langere periode beschouwd: van 1982 tot 2003. Tevens is de landenscore op het rekenen vergeleken met de scores op andere deelgebieden (algebra, meten, meetkunde, statistiek).
De cijfers geven aan, dat de Nederlandse tweedeklassers goed scoren op het rekenen. Nederland staat steeds in de subtop van de *rankings* van het rekenen. Opvallend is, dat rekenen een van de sterkste gebieden is voor de Nederlandse leerlingen. Daarnaast kunnen we constateren dat deze goede score in de loop van de beschouwde twintig jaar constant is.

[1] *TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Studies, voorheen Third International Mathematics and Science Study*

Inhoudsopgave

Voorwoord

Van 1999 tot 2002 draaide ik mee in de keuken van het internationaal vergelijkende TIMSS-onderzoek. Als jonge wiskundelerares maakte ik daar kennis met strenge onderzoeksconventies, zoals de *surprise visits* van externe kwaliteitscontroleurs, het dubbel invoeren van data en het *rücksichtslos* verwijderen van landen waar de data-afname niet aan de eisen voldeed. In 1999 repliceerden we de schriftelijke toets van 1995 en in 2000 repliceerden we praktische toets uit 1995[3]. Wie schetst onze verbazing dat de prestaties van de leerlingen van 1999/2000 helemaal niet sterk bleken te verschillen van die van vier/vijf jaar ervoor. De prestaties van de leerlingen bleken veel constanter dan het gevoerde beleid.
Men kan het onderwijs zowel op detailniveau (de individuele leerling, de geïsoleerde vaardigheid) als op macroniveau benaderen. Elk niveau heeft een eigen perspectief. Hier volgt een natuurkundige analogie: één bal in een gesloten ruimte gedraagt zich voorspelbaar. De beweging van de bal is goed te beschrijven met mathematische formules en daaruit kan de toekomstige beweging afgeleid worden. Nemen we echter enkele ballen samen in een gesloten ruimte, dan blijken deze zich *chaotisch* te gedragen: hun gezamenlijke beweging is lastig te beschrijven (oa. door de onderlinge botsingen) en alleen op korte termijn voorspelbaar. Bekijken we vervolgens een zeer grote hoeveelheid ballen in een gesloten ruimte, dan gedragen zij zich gezamenlijk als een gas onder constante druk en temperatuur. Het gedrag van een grote hoeveelheid ballen samen is goed voorspelbaar en noemen we: constant. Op grote schaal hebben we namelijk te maken met statistische gemiddelden en de impact van een klein aantal elementen daaruit is verwaarloosbaar.

Het voorliggende rapport beslaat de lange periode 1982-2003. Het geeft een trend in de rekenvaardigheden, zoals deze gemeten wordt in internationaal vergelijkend onderzoek. Dit is de eindversie, gemaakt na commentaren op de eerste versie (september 2007). Naast enkele redactionele veranderingen zij er toevoegingen gemaakt. Hieronder volgt staat een lijst van de gemaakte toevoegingen.

Geachte leden van de expertgroep. U moet komen tot een *evidence-based* advies aan de minister. Daarvoor is het belangrijk dat u zich baseert op feiten die systematisch en zonder *bias* zijn vergaard. Dit rapport geeft u feiten die zijn verzameld binnen een gerenommeerd project dat op geen enkele wijze het succes, of de wanprestatie, van het Nederlandse onderwijs wilde aantonen.

Amsterdam, 31 oktober 2007

Pauline Vos

[3] *Vos, P. (2002). Like an ocean liner changing course; the grade 8 mathematics curriculum in the Netherlands, 1995-2000. Academisch Proefschrift. http://purl.org/utwente/38690. Enschede: Universiteit Twente.*

Inleiding

In studies die het wiskundeniveau tussen landen vergelijken, zoals TIMSS[4], kan men een verandering aflezen in de prestaties op het gebied van rekenen. In deze internationaal vergelijkende studies worden andere landen als ijkpunt gebruikt: je kunt dan zien of de leerlingen in één land, in vergelijking tot andere landen, gezamenlijk beter of slechter zijn dan leerlingen in een ander land. Er zijn bij TIMSS geen absolute normen (bijvoorbeeld: door experts opgestelde criteria) opgesteld voorafgaand aan de metingen. Een land krijgt dus niet een 'voldoende', maar alleen een aanduiding van de prestatie in vergelijking tot die van andere landen. Men zou een streefniveau kunnen definiëren in termen als: 'de scores van Nederland leerlingen dienen beter te zijn dan die van de omringende landen'.

Met de *relatieve norm* in TIMSS is het ook relatief of de prestaties van de leerlingen in een land erop voor- of achteruit gaan. Als één land constant blijft en tegelijkertijd gaan andere landen er allemaal erg op vooruit, dan is de score van het constante land uitsluitend waarneembaar als een relatieve achteruitgang. Het is daarom raadzaam om de scores van één land met een grotere hoeveelheid andere landen te vergelijken; hoe meer landen, des te robuuster is het internationaal gemiddelde.

In dit verslag volgt een analyse van de gegevens voor het rekenen van tweedeklassers in Nederland in internationaal perspectief.

Dit rapport gaat over tweedeklassers in het VO. Waarom tweedeklassers? De beperking tot deze groep is afgedwongen door de keuze van de TIMSS-projectleiding. Hun keuze is gebaseerd op het internationale argument dat in de meeste landen in deze jaarlaag (Grade 8) geen nationale toetsen of examens worden afgenomen, die kunnen interfereren met de afname van TIMSS. Het niveau van de tweede klas leerlingen geeft ons in Nederland echter wel enige indicatie van het totaalniveau van het PO, aangezien de prestaties van tweede klas leerlingen de *cumulatieve* kennis, vaardigheden en inzicht van het PO bezitten; zij zijn voorbij eerste referentieniveau maar nog ruim voor het tweede referentieniveau[5].

Behalve voor de tweede klas, bestaat er ook een TIMSS-toets voor groep 6 van de basisschool (Grade 4), voor leerlingen van ongeveer 10 jaar oud. Deze toets is echter niet met regelmaat in de tijd afgenomen (bijvoorbeeld TIMSS-99 had geen afname in groep 6) en deze leerlingen bevinden zich nog onder het eerste refrentieniveau.

Naast TIMSS is er nog een andere grootschalige internationale studie, PISA (Programme for International Student Assessment). Deze heb ik slechts zijdelings meegenomen in dit rapport want dit project heeft pas gegevens vanaf 2000, enkele gegevens zijn statistisch onbetrouwbaar en voor wiskunde zijn niet bij elke afname alle deelgebieden gedekt.

[4] TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Studies, voorheen Third International Mathematics and Science Study. Alle internationale TIMSS-rapporten en databases voor rekenen/wiskunde, en ook voor science, zijn publiekelijk beschikbaar via http://timss.bc.edu/.

[5] Zoals geformuleerd in: Eerste deeladvies van de Expertgroep 'Doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen/wiskunde', DLL/4243/07-326, 2 juli 2007. Enschede: SLO.

TIMSS - een internationaal vergelijkende studie voor het wiskundeonderwijs

In de TIMSS-studies wordt op een bepaald tijdstip eenzelfde toets afgenomen in een groot aantal verschillende landen bij een grote steekproef van tweedeklassers. De toets is in alle landen gelijk, alleen vertaald naar de landstaal. De steekproef voor de toets is groot (meer dan tweeduizend leerlingen) en wordt getrokken uit de volle breedte van de populatie, dus de Nederlandse steekproef omvat voor het merendeel vmbo-leerlingen.
Een TIMSS-toets bevat niet alleen veel, maar ook een breed scala aan rekenen- en wiskundeopgaven. De toets wordt samengesteld door een commissie van experts uit een groot aantal landen. Zij gebruiken een *assessment framework* waarmee de toets gespreid wordt over enerzijds verschillende categorieën, zoals rekenen (vooral met breuken), verhoudingen, statistiek, meetkunde (oa. congruentie) en algebra. De Nederlandse categorie 'rekenen' omvat de internationale categorieën 'number sense' (basisoperaties als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, maar in deze categorie valt ook het rekenen met negatieve getallen, kwadrateren en schatten), 'fractions' (breuken, kommagetallen) en 'proportionality' (procenten, verhoudingen). Het *assessment framework* garandeert ook een spreiding over verschillende cognitieve niveaus (feitenkennis, procedures uitvoeren, redeneren, communiceren). De commissieleden brengen opgaven uit hun eigen land in, en aangezien de toets niet in Nederland wordt samengesteld, bevat deze veel 'kale' sommen.
Bij de samenstelling van de toets wegen naast vakinhoudelijke, ook toets-technische argumenten: de toets bevat een groot aantal opgaven[6] zodat individuele opgaven slechts een minimale invloed hebben (bijvoorbeeld een foute vertaling in een opgave); de toets moet met een grote mate van betrouwbaarheid gescoord kunnen worden (veel multiple-choice vragen) en daarnaast moet de toets in geen enkel deelnemend land té moeilijk zijn. Dat de TIMSS-toets dus gebruikt wordt om te scheiden tussen landen (en bijvoorbeeld niet tussen individuele leerlingen) maakt dat deze toets in veel opzichten verschilt van bijvoorbeeld toetsen zoals die worden opgesteld door Cito en Cevo, die door de *absolute normen* diepgravender rekenvaardigheden toetsen. Indien toetsen van een dergelijk kaliber bij een internationale vergelijking gebruikt zouden worden, dan was de score in teveel landen dicht bij nul terecht gekomen (en dat leidt tot onbetrouwbare resultaten).

Bij elke meting van TIMSS wordt een deel van de opgaven geheim gehouden en opnieuw gebruikt bij een volgende meting. Ook wordt een deel van de opgaven in *gekloonde* vorm bij een volgende meting gebruikt. Hier volgt opgave J12 (uit TIMSS-95 en TIMSS-99):

Reken uit: $\frac{8}{45} : \frac{4}{15} =$ Reken uit: $\frac{6}{55} : \frac{3}{25} =$

Dergelijke opgaven uit achtereenvolgende toetsen worden gebruikt om te bepalen of een land in vier jaar tijd erop voor- of achteruit is gegaan. Dit zal in dit rapport aan de orde komen. Daarnaast zal deze trend ook afgelezen kunnen worden aan de relatieve positie van Nederland ten opzichte van een aantal andere landen.
Hier volgen enkele voorbeelden van opgaven uit de TIMSS-toets. Deze opgaven zijn overgenomen uit de Engelstalige TIMSS-documenten, maar het zij de lezers duidelijk dat de Nederlandse leerlingen deze opgaven natuurlijk in het Nederlands voorgelegd kregen.[7]

At a play, $\frac{3}{25}$ of the people in the audience were children.

What percent of the audience was this?

(A) 12%
(B) 3%
(C) 0.3%
(D) 0.12%

In Nederland koos 79% van de leerlingen het juiste antwoord bij deze opgave (TIMSS 2003 rapport, item M032570), tegen 71% van de leerlingen in de VS en 87% van de leerlingen in Vlaanderen. De internationaal gemiddelde score op deze opgave was 55%.

If n is a negative integer, which of these is the largest number?

(A) $3 + n$
(B) $3 \times n$
(C) $3 - n$
(D) $3 \div n$

In Nederland koos 44% van de leerlingen het juiste antwoord bij deze opgave (TIMSS 2003 rapport, item M032643), tegen 48% van de leerlingen in de VS en 48% van de leerlingen in Vlaanderen. De internationaal gemiddelde score op deze opgave was 40%.

About 7000 copies of a magazine are sold each week. Approximately how many magazines are sold each year?

(A) 8400
(B) 35 000
(C) 84 000
(D) 350 000
(E) 3 500 000

In Nederland koos 86% van de leerlingen het juiste antwoord bij deze opgave (TIMSS 2003 rapport, item M022194), tegen 52% van de leerlingen in de VS en 83% van de leerlingen in Vlaanderen.
De internationaal gemiddelde score op deze opgave was 59%.

Het doel van de internationaal vergelijkende studies is om de scores van alle leerlingen op alle opgaven samen tussen de landen te vergelijken. Daarnaast worden in de rapporten de scores niet alleen als totaal, maar ook per deelgebied (meetkunde, algebra, enz) gerapporteerd. Naast de totaalscores heb ik de rekenen-scores uit de rapporten gekopieerd en in Tabel 1 naast elkaar gezet.

Ik kon ook beschikken over de data van 1982 uit SIMS[8]. Daardoor is er een rijtje ontstaan, van 1982, 1995, 1999 en 2003, dat ruim twee decennia bestrijkt. Van de allereerste studie uit deze serie, FIMS uit 1967, kon ik geen resultaten vinden; deze studie was een soort 'pilot studie' met onnauwkeurige data, zodat er nooit betrouwbare resultaten zijn gepubliceerd.
Op het bovenstaande rijtje van 1982-2003 komt ook voorlopig geen vervolg, want in 2007 neemt Nederland geen deel aan de TIMSS-toetsen voor tweedeklassers (wel met groep 6 van de basisschool). Daardoor wordt er voorlopig geen nieuwe informatie aan de tabel toegevoegd.
In één van de studies, TIMSS-95, werd het domein rekenen uitgesplitst in 'fractions and number sense' en 'proportionality'. Daarvan zijn de scores apart gegeven. In de andere studies werden deze deeldomeinen samen genomen.

De scores in de tabel komen uit de officiële rapporten. Het lastige daarbij is dat elk rapport een eigen meetschaal hanteert. Daardoor kunt u in de tabel alleen binnen één studie de scores vergelijken; de scores tussen de verschillende studies zijn niet goed vergelijkbaar. U kunt dus verticaal in de tabel vergelijken (tussen landen), en horizontaal alleen tussen de totaalscore en de ernaast genoteerde rekenen-score. U kunt niet horizontaal tussen de jaargangen vergelijken. Enerzijds komt dit doordat de opgavenset per studie in moeilijkheidsgraad verschilde, anderzijds omdat de scores vanaf 1999 werden omgezet naar het gemiddelde van de deelnemende landen (het gemiddelde werd gesteld op 500), en die groep landen verschilt per studie. Ik kom nog terug op dit punt (zie blz 11).

Ik heb een selectie gemaakt van tien relevante landen om Nederland mee te vergelijken: dat zijn enerzijds landen die ons omringen (let vooral op Vlaanderen), en anderzijds landen die *altijd* aan dergelijke studies als TIMSS meedoen (Hongarije, Japan, USA). Ik heb Duitsland en Frankrijk ook opgenomen, hoewel de informatie beperkt is: deze landen voelden zich na de resultaten van TIMSS-1995 teleurgesteld en stapten over op de andere internationale studie, PISA. Aldaar bleken hun leerlingen het wederom niet zo 'goed' te doen als de nationale trots verwachtte, maar dat is een verhaal dat verder niet thuis hoort in dit rapport.

Tabel 1: Totaal-scores en rekenen-scores van twaalf landen in SIMS en TIMSS (1982-2003)

	SIMS 1982		TIMSS 1995			TIMSS 1999		TIMSS 2003	
	totaal-score (176 opg)	reken-score (46 opg)	totaal-score (151 opg)	getallen-score (51 opg)	verhoudingen score (11 opg)	totaal-score (162 opg)	totaal-score (61 opg)	totaal-score (194 opg)	reken-score (57 opg)
Japan	62	60	73	75	61	579	570	570	557
Vlaanderen	52	57	66	71	53	558	557	537	539
Nederland	58	60	60	62	51	540	545	536	539
Hongarije	57	57	62	65	47	532	526	529	529
Frankrijk	53	58	61	64	49	--	--	--	--
Finland	50	49	--	--	--	520	531	--	--
Duitsland	--	--	54	58	42	--	--	--	--
Engeland	47	48	53	54	41	496	497	498	485
USA	45	51	53	59	42	502	509	504	508
Zweden	44	43	56	62	44	--	--	498	496
Noorwegen	--	--	54	58	40	--	--	461	456

Noot: -- betekent: geen deelname
De scores van 1982 en 1995 zijn een percentage (het gemiddelde percentage correcte antwoorden).
De scores van 1999 en 2003 zijn berekend naar een schaal met internationaal gemiddelde 500 en sd=100

[6] De opgaven worden met overlap verdeeld over twaalf boekjes; geen enkele leerling maakt de gehele toets.
[7] Voor meer opgaven uit TIMSS, zie http://isc.bc.edu/timss2003i/released.html (en dan klikken naar de opgaven voor de tweede klas = Released Items for Grade 8).
[8] SIMS: Second International Mathematics Study Alle SIMS gegevens in dit rapport komen uit: H. Pelgrum, Th. Eggen & Tj. Plomp (1986). The implemented and attained mathematics curriculum - a comparison of eighteen countries. Enschede: Technische Hogeschool Twente.

Resultaten van de rekenen-scores en de totaalscores

In SIMS (1982) deden 18, meest 'westerse' landen mee, voornamelijk uit Europa. Nederland eindigde voor de wiskunde-totaalscore op de gedeelde tweede plaats: achter Japan, ongeveer gelijk met Hongarije en ruim voor Vlaanderen en Frankrijk. Voor de rekenen-opgaven eindigde Nederland op een gedeelde eerste plaats, samen met Japan. Dat betekent dus dat de Nederlandse leerlingen toen, in vergelijking tot leerlingen uit andere landen, hoger scoorden op de rekenen-opgaven dan op de gehele toets.
In TIMSS-1995 deden veel meer landen mee, namelijk 41, verspreid over de hele wereld (inclusief landen als Iran en Zuid Afrika). Nederland eindigde voor de wiskunde-totaalscore op een negende plaats (rekening houdende met statistische meetfouten is het preciezer om te zeggen: op een gedeelde vijfde t/m 22^{e} plaats). Nederland eindigde achter Japan en enkele Aziatische landen (oa. Singapore, Hong Kong, Korea) die niet hadden meegedaan in SIMS. Voor de rekenen-opgaven (zowel 'fractions and number sense' als 'proportionality') eindigde Nederland eveneens in de subtop, op een gedeelde 10^{e} tot en met 18^{e} plaats. Wederom dus: de Nederlandse leerlingen scoorden, relatief ten opzichte van de andere landen, goed op de rekenen-opgaven.

In TIMSS-1999 deden 38 landen mee, en eindigde Nederland voor de wiskunde-totaalscore op een zevende plaats (preciezer gezegd: op een gedeelde zesde t/m 17^{e} plaats), wederom achter de Aziatische landen en niet significant verschillend van bijvoorbeeld Vlaanderen. Voor de rekenen-opgaven eindigde Nederland op vergelijkbare hoogte, op de 7^{e} plaats (preciezer gezegd: op een gedeelde zesde tot en met 14^{e} plaats). Wederom dus: de Nederlandse leerlingen scoorden, relatief ten opzichte van de andere landen, in de subtop op de rekenen-opgaven.

Terug naar Tabel 1. De laatste studie betreft TIMSS-2003. Daaraan deden 46 landen mee en toen eindigde Nederland voor de wiskunde-totaalscore wederom op een zevende plaats (preciezer gezegd: op een gedeelde zesde tot negende plaats), wederom achter de Aziatische landen en niet significant verschillend met Vlaanderen en Hongarije. Voor de rekenen-opgaven eindigde Nederland iets beter, op de 6^{e} plaats (preciezer gezegd: op een gedeelde vijfde tot en met achtste plaats). Wederom dus: de Nederlandse leerlingen scoorden, relatief ten opzichte van de andere landen, goed op de rekenen-opgaven; ze zitten telkens in de subtop van de complete rij van 46 landen, achter de 'Aziatische tijgers'.

De hamvraag is natuurlijk: is de rekenen-score van Nederland in deze studies relatief ten opzichte van de totaalscore toe- of afgenomen? De Nederlandse rekenen-score van 545 in TIMSS-1999 en van 539 in TIMSS-2003 geven tenslotte te denken, te meer daar de totaalscore van 540, respectievelijk 536 minder van elkaar verschillen. Tussen 1999 en 2003 is de totaalscore dus 4 punten minder geworden, terwijl de rekenen-score 6 punten is gedaald. Voor een antwoord op deze vraag moeten enkele methodologische problemen overwonnen worden. Er moet rekening worden gehouden met het feit dat de totaalscore ook de rekenen-score omvat. Daarnaast zijn er meetfouten (een land werd vertegenwoordigd door een steekproef). Een volgend probleem is dat de opgavenset niet dezelfde gebleven is, maar in 2003 behoorlijk uitgebreid werd met nieuwe sommen. Ook de landengroep is niet dezelfde, waardoor de gemiddelde score van 500 over alle landen niet dezelfde maat is voor 1999 en 2003.
Uit een analyse van de verschillende schalen blijkt dat er geen vooruitgang, maar ook geen achteruitgang is tussen 1982, 1995 en 1999 voor de Nederlandse rekenenscore. De eerste twee uitkomsten zijn uitgedrukt in procenten (voor 1982 en 1995) en de andere berekening op een genormeerde schaal met een kunstmatig gemiddelde van 500 en SD=100. De rekenenscore van 545 in 1999 blijkt echter precies overeen te komen met 63% (voor de 50 opgaven over 'getallen') en 56% (voor de 11 opgaven over 'verhoudingen') en verschilt daarmee niet significant van de vorige studie, in tegendeel: op het onderdeel 'verhoudingen' lijkt een verbetering te zijn opgetreden, die niet zichtbaar zou zijn als de gegevens voor 'rekenen' niet waren uitgesplitst in 1995. Geen of achteruitgang dus tot 1999. Maar hoe zit het tussen 1999 en 2003?
Tussen 1999 en 2003 verschilde de opgavenset aanzienlijk, doordat veel opgaven waren toegevoegd. De set was bijvoorbeeld uitgebreid met opgaven over regelmaat in patronen (een patroon van stippen of blokjes dat voortgezet moet worden). Vanwege de onvergelijkbaarheid tussen de opgavensets is in het TIMSS-2003 rapport een aparte analyse opgenomen over 79 opgaven (waaronder 25 rekenen-opgaven) die exact hetzelfde waren in de toetsen van 1999 en 2003. Dit levert een hele zuivere vergelijking tussen de studies op: de Nederlandse scores op deze *anker-opgaven* in absolute cijfers, dus zonder internationale vergelijking, zijn tussen 1999 en 2003 niet significant veranderd (een niet-significante vooruitgang van 58% in 1999 naar 60% in 2003).
De schijnbare achteruitgang van de Nederlandse rekenenscore tussen 1999 en 2003 (van 545 naar 539) is dus een schijnbare achteruitgang.

Inzoomen op afzonderlijke opgaven uit het deelgebied 'rekenen'

De Nederlandese score is een gemiddelde over de hele steekproef van leerlingen, en ook over een grote groep opgaven. We kunnen dan ook inzoomen op afzonderlijke opgaven, zoals de volgende opgave, waarop Nederland beter scoorde dan welk ander land ook:

Welke van de volgende getallen ligt het dichtste bij 10?

A. 0,10
B. 9,99
C. 10,10
D. 10,90

Op veel opgaven doen de Nederlandse leerlingen het goed of zelfs uitzonderlijk goed in internationaal perspectief. Zie Bijlage 1: Performance at International Benchmarks in TIMSS-2003.
Hier zijn opgaven gekopieerd uit het internationale TIMSS-2003 rapport[9] en staat de volledige *ranking* van landen per opgave. Om Nederland en Vlaanderen makkelijker terug te vinden in de landenlijst heb ik deze twee landen geel gearceerd.

Als we de 57 rekenen-opgaven uit TIMSS 2003 bestuderen, dan zien we dat de Nederlande tweedeklassers op een groot aantal opgaven veel hoger scoren dan het internationaal gemiddelde.
Ik heb daarom uit de database[10] de opgaven eruit gelicht, waarop de score van de Nederlandse leerlingen lager uitviel dan het internationaal gemiddelde. Dit zijn dus opgaven die een relatieve zwakte in internationaal perspectief aanduiden.
Ik vond zeven opgaven. Hier volgt een van deze opgaven (code van de opgave: M022199, met de typering "addition/ multiplication with fractions"):

$$\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{10}\times\frac{4}{15}\right)=$$

(A) $\frac{3}{51}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{6}{25}$

(D) $\frac{11}{25}$

(E) $\frac{17}{25}$

In Nederland koos 40%% van de leerlingen bij deze opgave het juiste antwoord (TIMSS 2003), tegen 36% van de leerlingen in de VS en 53% van de leerlingen uit Vlaanderen. De internationaal gemiddelde score op deze opgave was 41%.
De overige zes opgaven kunnen niet openbaar gemaakt worden, omdat TIMSS opgaven geheim houdt om deze te kunnen hergebruiken. De geheime opgaven worden alleen met algemene kenmerken beschreven. Het betrof nog twee andere opgaven waarin met breuken gerekend moest worden (M022066: addition of three fractions; M032416: the correct procedure for finding 1/5 minus 1/3). Men zou hieruit, ten onrechte, kunnen afleiden dat Nederlandse leerlingen slecht scoren op 'breuken', maar dit is niet correct: ze scoren wel bovengemiddeld op andere opgaven over breuken, zoals die waarin breuken moeten worden omgezet naar procenten of naar decimalen, of waarin breuken gevisualiseerd worden als een sector van een cirkel of als een aantal hokjes in een rooster. *Het is echter wel opvallend, dat de drie opgaven allen 'bewerkingen tussen breuken' betreffen: het is dus mogelijk dat de Nederlandse leerlingen wel een goed conceptueel begrip hebben van breuken (in de internationale vergelijking dus), maar dat de procedurele vaardigheden achterblijven.*

Bij de opgaven waarop de Nederlandse tweedeklassers lager scoorden dan het international gemiddelde waren voorts twee opgaven met verhoudingen (M022106: ratio of children and adults on a bus; M022234B: new rectangle from old/ratio of area) en een opgave over verdelen (M032142: the number of boys and girls in 4 classes). Ook hieruit kan niet afgeleid worden dat de Nederlandse leerlingen het relatief slecht doen op 'verhoudingen', omdat zij op andere opgaven over verhoudingen wél bovengemiddeld scoren.
Tenslotte was er nog een opgave over priemfactorontbinding (M032626: 36 expressed as a product of prime factors), waarop de Nederlandse leerlingen lager scoorden dan de internationale score: dit heeft duidelijk een oorzaak in het gegeven onderwijs, waarin priemgetallen niet of nauwelijks genoemd worden.
Met bovengenoemde zeven opgaven waarop de Nederlandse leerlingen relatief zwakker scoren, kunnen we echter ook zeggen, dat de Nederlandse leerlingen op vijftig van de 57 rekenen-opgaven boven, of soms zelfs vér boven het internationaal gemiddelde scoren. Op enkele opgaven behoort Nederland tot de absolute top, zoals de afschattingsopgave uit Bijlage 1. Over de gehele set van rekenen-opgaven behoort Nederland, zoals uit Tabel 1 al bleek, bij de internationale subtop, direct achter de Aziatische top-landen.

En hoe zit het met de algebra?[11]

In deze paragraaf komt een ander gebied ut de wiskunde aan de orde: de algebra. Hoewel dit gebied niet tot de zwaartepunten van het PO behoort, geeft het toch een goed beeld van de stand van zaken in ons onderwijs over de afgelopen vijfentwintig jaar.
In het gebied algebra vallen opgaven van het type *los op 3x+5=17* en *wat is* k^2 *als k=-3?*
Op die laatste opgave kiest ongeveer 54% van de Nederlandse tweede klas leerlingen het juiste antwoord, tegen 66% van de leerlingen in de VS en 63% van de leerlingen uit Vlaanderen. De internationaal gemiddelde score op deze opgave was 48%.
Tabel 2 (pag. 116) bevat de resultaten op het deelgebeid algebra, in vergelijking tot de totaalscore voor dezelfde twaalf landen als in Tabel 1.

In SIMS (1982) eindigde Nederland van de 18 landen voor de algebra-opgaven op een gedeelde derde plaats, terwijl men voor de totaalscore op een gedeelde tweede plaats en voor rekenen op een gedeelde eerste plaats eindigde. Dat betekent dus dat de Nederlandse leerlingen toen al, in vergelijking tot leerlingen uit andere landen, minder hoog scoorden op de kale algebraopgaven dan op de gehele toets.
In TIMSS-1995 eindigde Nederland op de algebraopgaven in de middenmoot, op een gedeelde achttiende tot en met 22^{e} plaats, terwijl men voor de totaalscore op een negende plaats en voor rekenen op een gedeelde tiende plaats eindigde. Wederom dus: de Nederlandse leerlingen scoorden, relatief ten opzichte van de andere landen, minder op de algebraopgaven. Maar ze zaten voor de algebra wel in de bovenste helft van de complete rij van 41 landen.
In TIMSS-1999 eindigde Nederland op de algebraopgaven wederom iets lager dan op de totaalscore, op de 12^{e} plaats (preciezer gezegd: op een gedeelde zesde tot en met 21^{e} plaats), terwijl men voor de totaalscore op een zevende plaats en voor rekenen ook op een zevende plaats eindigde. Wederom dus: de Nederlandse leerlingen scoorden, relatief ten opzichte van de andere landen, minder hoog op de algebraopgaven.
In TIMSS-2003 eindigde Nederland op de algebra wederom iets lager dan op de totaalscore, op de 10^{e} plaats (preciezer gezegd: op

[9] *Dit betreft letterlijke bladzijden uit hoofdstuk 3 uit het internationale rapport van TIMSS 2003. De tussenliggende bladzijden bevatten uitleg van de selectie van 'benchmarking opgaven' en samenvattingen van de rankings. De opgaven beslaan een breed gebied (ook bijvoorbeeld meetkunde). De laatste pagina's gaan niet over de tweede klas (Grade 8) maar over groep 6 (Grade 4) en zijn voor een aanvullend beeld opgenomen.*
[10] *Deze is vrij beschikbaar op het internet.*
[11] *Deze paragraaf is een samenvatting van: Vos, P. (2007). Algebra-prestaties van tweedeklassers: zijn ze voor- of achteruit gegaan? Euclides, 82(4), 129-132.*

Tabel 2: Totaal-scores en algebra-scores van twaalf landen in SIMS en TIMSS (1982-2003)

	SIMS 1982		TIMSS 1995		TIMSS 1999		TIMSS 2003	
	totaal-score (176 opg)	algebra-score (40 opg)	totaal-score (151 opg)	algebra-score (27 opg)	totaal-score (162 opg)	algebra-score (35 opg)	totaal-score (194 opg)	algebra-score (47 opg)
Japan	62	60	73	72	579	569	570	568
Vlaanderen	52	51	66	63	558	540	537	523
Nederland	58	52	60	53	540	522	536	514
Hongarije	57	51	62	63	532	536	529	534
Frankrijk	53	55	61	54	--	--	--	--
Finland	50	46	--	--	520	498	--	--
Duitsland	--	--	54	48	--	--	--	--
Engeland	47	39	53	49	496	498	498	492
USA	45	43	53	51	502	506	504	510
Zweden	44	34	56	44	--	--	498	480
Noorwegen	--	--	54	45	--	--	461	428

Noot: -- betekent: geen deelname
De scores van 1982 en 1995 zijn een percentage (het gemiddelde percentage correcte antwoorden).
De scores van 1999 en 2003 zijn berekend naar een schaal met internationaal gemiddelde 500 en sd=100

een gedeelde achtste tot en met 13e plaats), terwijl men voor de totaalscore op de zevende en voor rekenen op de zesde plaats eindigde. Wederom dus: de Nederlandse leerlingen scoorden, relatief ten opzichte van de andere landen, minder op de kale algebraopgaven, maar ze zaten wel weer in de bovenste helft van de complete rij van 46 landen.

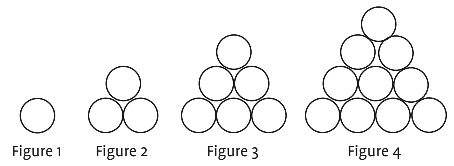
Over de algebra kunnen we dus concluderen dat Nederland al sinds meer dan een kwart eeuw een minder hoge score heeft dan de totaalscore. In Japan en de Verenigde Staten bijvoorbeeld is dat verschil tussen totaalscore en algebrascore nauwelijks aanwezig. De lagere score op algebra van Nederlandse leerlingen is dus niet iets van de meest recente jaren; het dateert al vanaf het begin van de studies en dus ook mogelijk van nog eerder daarvoor. Daarnaast is het zo, en dit lijkt ook een historische constant fenomeen voor de afgelopen twee decennia, dat de Nederlandse algebrascore telkens nét boven het internationale gemiddelde ligt. Ondanks de verschillende accenten die er in de afgelopen decennia in Nederland gelegd zijn, doen we het op de kale algebraopgaven dus maar 'nèt bovengemiddeld'.

Zoals al eerder gemeld is het vergelijken tussen de studies lastig, maar de rapporten vermelden dat de algebrascore van Nederland in TIMSS relatief ten opzichte van de totaalscore niet is toe- of afgenomen. Deze analyse is oa gebaseerd op de set *ankeropgaven* die in de overlap tussen de jaren gelijk bleef.

Ik heb namelijk ook nog gekeken naar het type algebraopgaven waarop Nederlandse leerlingen het relatief minder goed doen. Het zijn dus niet de kale algebraopgaven mét variabelen en expressies, zoals *los op $3x+5=17$* en *wat is k^2 als $k=-3$*, waarop Nederlandse leerlingen het minder goed doen dan leerlingen in andere landen. Integendeel, in andere landen kunnen de meeste leerlingen daar óók niet mee uit de voeten.
Het type opgave waar Nederlandse leerlingen minder op scoren dan zijn dan bijvoorbeeld opgaven zoals in Figuur 1: een rij gestapelde ballen, waarvan elke stapeling is afgeleid uit de vorige. Nederlandse leerlingen komen goed uit de eerste twee deelvragen over de tabel en de eerste paar stapelingen uit de rij. Maar de laatste vraag ("de 50e figuur heeft 1275 ballen, hoeveel ballen bevat de 51e figuur? Verklaar je antwoord zonder de figuur te tekenen.") blijkt voor Nederlandse leerlingen moeilijker dan voor leerlingen in veel andere landen. Ze hebben geen ervaring met de betrekking tussen opeenvolgende figuren en 'zien' daardoor niet dat een figuur voortkomt uit de vorige figuur. Daardoor kunnen ze niet op een informele manier omgaan met de recurrente betrekking (ook als deze informeel opgevat wordt als verband tussen opeenvolgende waarden in een rij).

Figuur 1: Algebra-opgave uit TIMSS-1999

The figures show four sets consisting of circles.



a. Complete the table below.
First fill in how many circles make up Figure 4.
Then, find the numbers of circles that would be needed for the 5th figure if the sequence of figures is extended.

Figure	Number of circles
1	2
2	3
3	6
4	
5	

b. The sequence of figures is extended to the 7th figure.
How many circles would be needed for Figure 7?

Answer:____________________

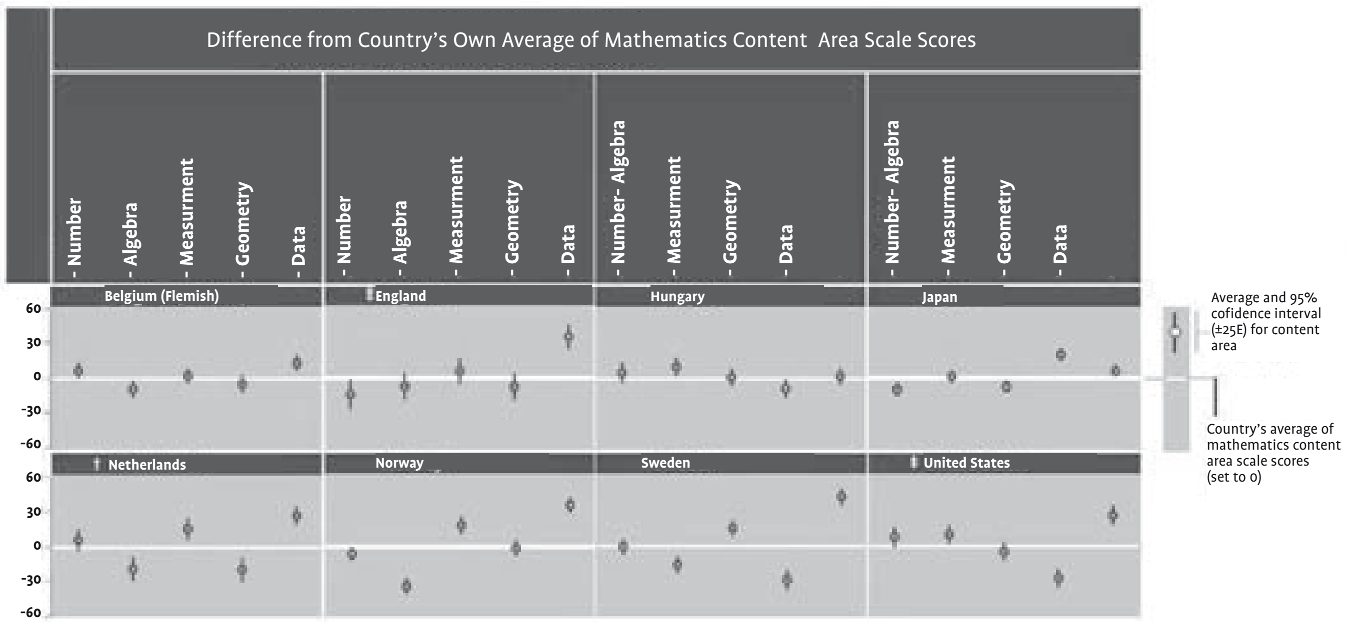
c. The fifth figure in the sequence contains 12/5 circles.
Determine the number of circles in the 51st figure. Without drawing the 51st figure, explane or show how you arrived at your answer.

Het blijken dus typisch de niet-kale algebraopgaven te zijn, waarop Nederlandse leerlingen het wat minder goed doen. Dat zijn opgaven met een niet-alledaagse, wat abstractere context, waarin zonder variabelen, maar mét een patroon geredeneerd moet worden.

De relatieve prestaties op de wiskundige deelgebieden

Uit het voorgaande blijkt dat de Nederlandse rekenen-score van tweedeklassers in internationaal perspectief 'goed' is en dat de score op het rekenen de totaalscore omhoog trekt. Evenzo is gebleken dat de Nederlandse algebra-score in internationaal perspectief 'relatief iets minder' is en dat de algebrascore de totaalscore omlaag trekt.
Om dit beter te kunnen analyseren kunnen we de score op de deelgebieden afzetten tegen de score op andere wiskunde-gebieden, zoals meetkunde, meten en datarepresentatie (statistiek). In het TIMSS-2003 rapport wordt dit gevisualiseerd met een speciaal diagram die de scores op de verschillende rekenen/wiskunde-gebieden van elk land met elkaar vergelijkt.
In dit diagram is de totaalscore op een nullijn gezet, en is berekend hoeveel de scores op de deelgebieden erboven of eronder liggen. Aldus krijg je voor elk land een profiel van sterkere en zwakkere rekenen/wiskunde-gebieden. In Figuur 2 is dit weergegeven voor de eerdergenoemde acht landen (die ook in Tabel 1 stonden en die deelnamen aan TIMSS 2003). Deze figuur is gekopieerd uit het internationale rapport. Voor elk land zijn er vijf meetpunten uitgezet, voor de deelgebieden rekenen, algebra, meten, meetkunde en statistiek.
In Figuur 2 zien we voor Nederland, dat rekenen, meten en statistiek de relatief sterkere domeinen van de Nederlandse tweedeklassers zijn. Op deze domeinen trekken de tweedeklassers hun score omhoog, terwijl deze score omlaag gehaald wordt op de domeinen algebra en meetkunde (driehoeken, congruentie, enz).
Niet elk land heeft hetzelfde profiel in een W-vorm zoals Nederland. Het profiel van bijvoorbeeld Vlaanderen en Hongarije is veel vlakker, hetgeen betekent dat de leerlingen niet echt zwakker of sterker zijn op een van de deelgebieden.
Opvallend is verder, dat bijvoorbeeld in Engeland de leerlingen relatief zwakker zijn op het rekenen-gebied.

Figuur 2: Profiel van de scores van een land, relatief per deelgebied voor rekenen/wiskunde
numbers = rekenen algebra = algebra measurment = meten geometry = meetkunde data = statistiek



Source: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

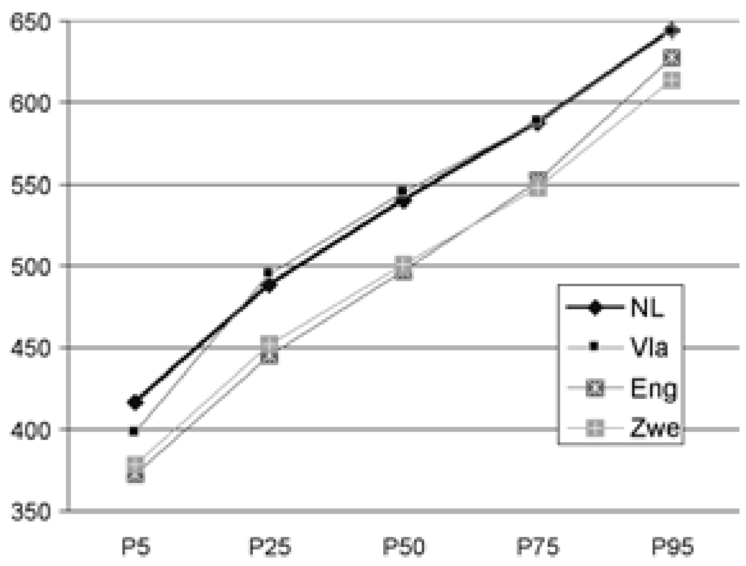
Prestaties van deelgroepen van tweedeklassers[12]

In de internationale rapporten worden de scores uitgesplitst naar verschillende groepen leerlingen, de zogenaamde percentielen. Het 5e percentiel (P5) laat de slechtst presterende 5% van de leerlingen achter zich. Analoog zijn P25, P50 (de mediaan), P75 en P95 gedefinieerd. Over de uitersten naar boven en beneden (onder P5 en boven P95) wordt niet apart gerapporteerd (ze zijn uiteraard wel meegenomen in de berekening van de totaalscore). In onderstaande tabel zijn de scores op de vijf percentielen gegeven voor de acht landen uit tabel 1, die in TIMSS 2003 deelnamen.

In de tabel ziet u, dat de scores per percentiel toenemen; dat is logisch want elk hoger percentiel is beter in wiskunde en scoort dus hoger. Ik heb uit dezelfde data ook een grafiek gegenereerd voor vier landen: Nederland, Vlaanderen, Engeland en Zweden. U kunt in de figuur zien, dat de Nederlandse grafiek met name in het begin minder stijl loopt. In Tabel 3 staat een kolom voor de 'richtingscoëfficiënt' van de lijn die de percentielscores verbindt, dit is de scoretoename per percentiel. Het blijkt dat Nederland in deze kolom het laagste cijfer heeft. Wat betekent dit? Landen met een hogere scoretoename per percentiel hebben een groter verschil tussen de 'zwakke' en de 'betere' leerlingen. De landen met met een lagere scoretoename zijn meer egalitair. Nederland behoort daar bij uitstek bij.
Dit betekent enerzijds, dat het laagste percentiel P5 in Nederland relatief hoger scoort dan in de andere landen. De 'zwakkere' leerlingen in Nederland zitten dus relatief dichter op de gemiddelde leerlingen. Dus: als Nederland met de minder-begaafde leerlingen zou meedoen, tegen de minderbegaafden van de andere landen, dan zouden we nóg hoger eindigen.
De leerlingen die rondom het vijfde percentiel P5 zitten zijn de leerlingen van de praktijkscholen en in de 'lagere' leerwegen van het vmbo. Dus níet de vmbo-tl-leerlingen en hoger. Kortom: we doen in Nederland dus iets, dat goed is om de laagstbegaafden binnen de boot te houden.

Tabel 3: scores per percentiel in TIMSS 2003 (Uit Mullis et al. (2004), blz. 410)

	P5	P25	P50	P75	P95	score-toename per percentiel
Japan	433	519	572	623	697	2.73
Vlaanderen	398	495	545	588	643	2.52
Nederland	417	488	540	587	644	2.39
Hongarije	398	476	531	584	656	2.70
Engeland	373	445	497	552	627	2.66
USA	369	450	505	560	635	2.78
Zweden	378	452	501	548	614	2.46
Noorwegen	340	414	465	511	573	2.44



[12] *Zie ook: Vos, P. (2005), PISA en TIMSS; hoe staat het Nederlandse wiskundeonderwijs er internationaal gezien voor?. Euclides, 80(6), 316-320.*

Aan de andere kant van deze analyse zien we, dat de 'beste' leerlingen in Nederland relatief dichter op de gemiddelde leerlingen zitten. Dus: als Nederland met de meer begaafde leerlingen zou meedoen, tegen de meer begaafden van de andere landen, dan zouden we enigzins lager eindigen (maar zoals af te lezen is: nog steeds flink hoog). Kortom: we doen in Nederland dus iets, dat de hoogstbegaafden niet doet excelleren[13] en het is de vraag of hier winst te behalen zou zijn, zonder dat dit ten koste gaat van de P5-prestaties.

Conclusies

Zoals we allemaal weten is de Nederlandse totaalscore voor wiskunde in internationaal perspectief 'goed'. In dit rapport is gekeken naar de internationale scores van de Nederlandse tweedeklassers op het deelgebeid van het rekenen.
Voor de periode 1982 - 2003 blijkt dat de Nederlandse rekenen-score in de internationaal vergelijkende toetsen even hoog of zelfs licht hoger is dan de Nederlandse totaalscore. De goede score op rekenen van Nederlandse leerlingen is dus niet iets van 'vroeger'; het is zichtbaar in zowel de vroegere als de latere studies. Daarnaast is het zo, en dit lijkt ook een historisch constant fenomeen van de afgelopen twee decennia, dat de Nederlandse rekenen-score telkens nét iets boven de totale wiskunde-score van Nederland ligt. Ondanks de verschillende accenten die er in de afgelopen decennia in Nederland gelegd zijn, doen we het op de rekenen-opgaven dus ronduit 'goed' in internationaal perspectief.
Resultaten uit het verleden bieden geen garantie voor de toekomst. Een slag om de arm met betrekking tot toekomstige ontwikkelingen blijft gewenst. Mijn waarschuwing baseer ik op het volgende: binnen TIMSS 1995 en TIMSS 2003 werden ook de leerlingen in groep 6 getest. De Nederlandse leerlingen deden het ook op dit niveau erg goed in internationaal perspectief: ze eindigden direct achter Japan en Vlaanderen. Opmerkelijk was echter, dat er een kleine achteruitgang gemeten werd tussen de resultaten van 1995 en 2003. Het verschil was klein, maar wel significant. Deze leerlingen uit groep 6 in 2003 zullen meerendeels vier jaar later in de tweedeklas zitten. Het is dus niet uitgesloten dat de prestaties van dit cohort tweedeklassers ook iets lager gaat uitvallen. Helaas zal dit echter niet gemeten kunnen worden, doordat Nederland in 2007 niet met de tweede-klassers deelneemt in TIMSS (en wel met groep 6).
Het blijft echter van belang om op te merken, dat ook een iets lagere score van de groep-6-leerlingen in 2003 nog steeds erg hoog was in internationaal perspectief. De betreffende groep leerlingen uit groep 6 in Nederland eindigden nog steeds ver boven hun collega's uit Engeland, Hongarije, de Verenigde Staten, Noorwegen, enz. De lichte achteruitgang leidde niet tot een noemenswaardige verandering in de *ranking* van Nederland.

Met de constatering van een hoge score en een grote continuïteit in wiskunde- en ook in rekenen-prestaties van Nederlandse tweedeklassers hebben we echter nog geen verklaring.
De internationale studies geven een krachtige beschrijving, maar geen verklaring van het beschrevene. Dat zijn de vrije jachtvelden van iedereen met een mening.
Er wordt wel onderzoek gedaan naar verklaringen van de

Tabel 4: Overzicht van sterke en zwakke punten van de prestaties van Nederlandse tweede klas leerlingen, zoals af te leiden uit SIMS en TIMSS (1982-2003)

Sterke punten	• Hoge internationale score over de gehele linie van de toetsen, • Nederlandse leerlingen scoren hoger dan omringende landen, met uitzondering van Vlaanderen • hoge score constant over de jaren sinds 1982 • een relatief hoge score op de gebieden rekenen en statistische verwerking • hoge score van de 'zwakkere' leerlingen relatief tov de 'gemiddelde' leerlingen
Zwakke punten	• Relatief tov de totaal score een lagere score op algebra en meetkunde (maar nog steeds een hoge internationale score) • een lage score van de 'betere' leerlingen relatief ten opzichte van de 'gemiddelde' leerlingen. • Binnen het rekenen-gebied een zwak punt geconstateerd bij opgaven over 'bewerkingen op breuken' (maar niet op het gehele gebied van 'breuken') • Binnen het algebra-gebied een zwak punt geconstateerd bij opgaven die vragen om 'mathematiseren'

[13] *Deze conclusie wordt bevestigd op basis van data uit Pisa, zie: Dekker, T., Lagerwaard, G., Lange, J. de, Limpens, G and Wijers, M. (2006). Wiskundige geletterdheid volgens Pisa. Utrecht: Freudenthal Instituut. De helft van de conclusie, namelijk alleen met betrekking tot de 'allerbeste' leerlingen, wordt bevestigd door de constante zwakke prestaties van Nederland op de Wiskunde Olympiade (dit betreft P99,995) en in een CPB-rapport (over P99, zie http://www.cpb.nl/nl/pub/cpbreeksen/bijzonder/69/bijz69.pdf).*

prestaties op nationaal niveau. Enkele factoren die een rol schijnen te spelen zijn: de kwaliteit van de leraren (in andere landen schiet de kennis van docenten ernstig tekort), de economische situatie (daarom scoort Vlaanderen hoger dan Walonië), de gezondheidssituatie van de leerlingen en het geluksgevoel bij leerlingen. In het internationale onderzoek van Unicef naar 'gelukkige kinderen' berichtte de BBC verbaasd: *"Why are Dutch children so happy?"*[14].Het lastige bij het onderzoek naar verklaringen is dat bij veel aspecten oorzaak en gevolg vaak slecht te scheiden zijn.
Als een bijzondere factor is wel het *curriculum* genoemd. De hoge score van de Nederlandse leerlingen op Pisa (die andere internationale toets, waarvan de opgaven door het Cito ism Freudenthal Instituut worden ontwikkeld) zou hiermee verklaard kunnen worden. De factor curriculum verklaart echter niet de hoge score van de Nederlandse leerlingen op TIMSS, dat juist niet aansluit op ons wiskundeonderwijs. Om dit punt te onderzoeken is er binnen TIMSS een *Test-Curriculum Matching Analysis* gehouden, waarin de scores van de landen werden herberekend op basis van de aansluiting op het leerplan. De resultaten toonden aan, dat de *ranking* van de landen slechts minimaal veranderde. Nederlandse leerlingen bleken namelijk ook heel redelijk te scoren op opgaven die totaal niet bij het curriculum, dat hen geboden wordt, pasten.

Persoonlijk denk ik, dat het Nederlandse rekenen-wiskunde-onderwijs sinds jaar en dag heel goed is, zeker in vergelijking tot dat van andere landen. Nederlandse leraren zijn bijvoorbeeld weinig afwezig. Ook weet ik uit ervaring dat, in vergelijking tot onze collega's in het buitenland, dat Nederlandse docenten een veel groter accent leggen op 'begrijpen' en minder op 'drill'. In Nederland wordt een klas niet gedwongen om *unisono* rekenregels op te dreunen. Daarnaast hebben Nederlandse leerlingen 'lef' als ze opgaven zien waarmee ze nog nooit eerder geconfronteerd zijn. Leerlingen die les krijgen binnen meer algoritmische tradities slaan sneller dicht bij het zien van een 'rare' opgave. In veel landen slaan de leerlingen dan de TIMSS-opgaven over.
Hetgeen hierboven staat zijn hypothesen. Ik kan deze tot nu toe niet staven met wetenschappelijk onderzoek. Datzelfde geldt echter ook voor mensen die alternatieve verklaringen hebben.

Naast de goede resultaten van Nederland in TIMSS en andere internationaal vergelijkende studies zijn er ook onderzoeken, zoals door de Inspectie[15], PPON door het Cito, enzovoorts. Het is de vraag in hoeverre de resultaten ervan met elkaar rijmen. Kuiper, Boersma en Van den Akker vroegen zich dit af en vergeleken de resultaten uit het Inspectie-onderzoek over de Basisvorming en het TIMSS-1999 onderzoek[16].

Zij onderscheidden doelen en niveaus van de onderzoeken en komen tot de conclusie:

"Signaleert de Inspectie dat de beker niet helemaal vol is, het TIMSS-onderzoek laat zien dat de beker aardig gevuld is." (p. 114)

Kortom: de Nederlandse leerlingen doen het relatief 'goed' op het rekenen, en hun prestaties blijven door de jaren heen constant. We kunnen niet anders dan concluderen, dat het onderwijs in de meeste andere landen niet duidelijk betere resultaten oplevert. Het lijkt erop dat het type instructie (met of zonder contexten) de resultaten van de gemiddelde 14-jarige Nederlandse leerling op het gebied van rekenen niet verbetert, maar ook niet verslechtert. Let wel: de 'gemiddelde leerling' is een meisje op het vmbo-t.

[14] *zie http://news.bbc.co.uk/2/hi/europe/6360517.stm, en aldaar is ook een link naar het rapport. In de Volkskrant van 15 januari 2007 was de kop "Kinderen nergens zo gelukkig als in Nederland".*
[15] *Inspectie van het Onderwijs (1999). Werk aan de basis; evaluatie van de basisvorming vijf jaar na de invoering. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.*
[16] *W. Kuiper, K. Boersma & J. vd Akker (2001). Discrepanties in onderzoeksresultaten omtrent de kwaliteit van de exacte vakken in de basisvorming. Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen, 18(2), 140-161.*

Over de auteur

Dr F.P. (Pauline) Vos werkt als onafhankelijk consultant ten dienste van de educatie en communicatie in de exacte vakken, ihb het wiskundeonderwijs. Ze werkte oa. voor de Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (coördinatie van de implementatie van het vak Wiskunde D) en voor de VN-Wereldvoedselorganisatie FAO (ontwikkelen van voedingsonderwijs in Mozambique). In het verleden was zij wiskundelerares en lerarenopleider. Sinds 2004 is ze part-time verbonden aan de Rijksuniversiteit Groningen, alwaar zij oa. promotie-onderzoek begeleidt op het gebied van het wiskundeonderwijs. Haar vertrouwdheid met internationale studies komt doordat ze vele jaren in het buitenland werkte, en bovendien voor haar proefschrift aan de Universiteit Twente gebuik maakte van data uit TIMSS-1995 en TIMSS-1999.

Email: f.p.vos@rug.nl

Bijlage 1

TIMSS2003 landenrankings
op afzonderlijke opgaven

Exhibit 2.6: **TIMSS 2003 Advanced International Benchmark (625) of Mathematics Achievement – Example Item 1 (Part C)**

An Item That Students Reaching the Advanced International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

MATHEMATICS Grade 8

Content Area: Algebra

Description: Part C–Generalizing from the first several terms of a sequence growing in two dimensions, explains a way to find a specified term, e.g. the 50th.

The three figures below are divided into small congruent triangles.

Figure 1 Figure 2 Figure 3

A. Complete the table below. First, fill in how many small triangles make up Figure 3. Then, find the number of small triangles that would be needed for the 4th figure if the sequence of figures is extended.

Figure	Number of Small Triangles
1	2
2	8
3	18
4	32

B. The sequence of figures is extended to the 7th figure. How many small triangles would be needed for Figure 7?

Answer: 98

$7^2 \times 2$
49×2

C. The sequence of figures is extended to the 50th figure. Explain a way to find the number of small triangles in the 50th figure that does not involve drawing it and counting the number of triangles.

$50^2 \times 2$
2500×2
5000

The answer shown illustrates the type of student response that was given full credit.

Country	Percent Full Credit	
Chinese Taipei	49 (2.0)	○
** Korea, Rep. of	48 (1.8)	○
† Hong Kong, SAR	45 (2.0)	○
Singapore	44 (2.0)	○
Japan	44 (2.1)	○
† Netherlands	36 (2.4)	○
Australia	26 (2.7)	○
Hungary	24 (2.1)	○
† Scotland	22 (2.2)	○
Belgium (Flemish)	21 (1.3)	○
‡ United States	19 (1.5)	○
Sweden	17 (1.6)	
New Zealand	16 (2.1)	
Estonia	15 (1.3)	
Slovak Republic	14 (1.5)	
International Avg.	14 (0.2)	
Italy	14 (1.5)	
Latvia	13 (1.5)	
Slovenia	13 (1.6)	
1 Serbia	11 (1.2)	▼
1 Lithuania	11 (1.3)	▼
Romania	11 (1.6)	▼
Malaysia	10 (1.0)	▼
2 Israel	10 (1.3)	▼
Cyprus	10 (1.1)	▼
Norway	9 (1.3)	▼
Russian Federation	9 (1.2)	▼
Armenia	8 (1.2)	▼
1 Indonesia	7 (0.9)	▼
Chile	6 (0.8)	▼
Jordan	5 (0.9)	▼
Egypt	5 (0.8)	▼
Palestinian Nat'l Auth.	5 (0.7)	▼
2 Macedonia, Rep. of	4 (0.9)	▼
Philippines	4 (0.9)	▼
Bulgaria	4 (0.8)	▼
Bahrain	4 (0.8)	▼
Iran, Islamic Rep. of	3 (0.6)	▼
1 ‡ Morocco	2 (0.8)	▼
Botswana	2 (0.5)	▼
South Africa	1 (0.5)	▼
Tunisia	1 (0.3)	▼
Lebanon	1 (0.3)	▼
Ghana	1 (0.3)	▼
Saudi Arabia	0 (0.1)	▼
Moldova, Rep. of	0 (0.1)	▼
¶ England	20 (2.0)	○
Benchmarking Participants		
Basque Country, Spain	16 (2.0)	
Indiana State, US	16 (1.9)	
Ontario Province, Can.	26 (2.3)	○
Quebec Province, Can.	28 (2.7)	○

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

○ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered fully correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

¶ Did not satisfy guidelines for sample participation rates (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

2 National Defined Population covers less than 90% of National Desired Population (see Exhibit A.6).

** Korea tested the same cohort of students as other countries, but later in 2003, at the beginning of the next school year.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.7: **TIMSS 2003 Advanced International Benchmark (625) of Mathematics Achievement – Example Item 2**

An Item That Students Reaching the Advanced International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

MATHEMATICS Grade 8

Content Area: Data

Description: Interpret data from a table, draws and justifies conclusions.

Betty, Frank, and Darlene have just moved to Zedland. They each need to get phone service. They received the following information from the telephone company about the two different phone plans it offers.

They must pay a set fee each month and there are different rates for each minute they talk. These rates depend on the time of the day or night they use the phone, and on which payment plan they choose. Both plans include time for which phone calls are free. Details of the two plans are shown in the table below.

Plan	Monthly Fee	Rate per minute		Free minutes per month
		Day (8 am – 6 pm)	Night (6 pm – 8 am)	
Plan A	20 zeds	3 zeds	1 zed	180
Plan B	15 zeds	2 zeds	2 zeds	120

Betty talks for less than 2 hours per month. Which plan would be less expensive for her?

Less expensive plan Plan B

Explain your answer in terms of both the monthly fee and free minutes.

She talks for less than 2 hours and Plan B has less monthly fees

The answer shown illustrates the type of student response that was given full credit.

Country	Percent Full Credit	
Japan	49 (2.2)	○
Australia	44 (2.2)	○
Estonia	44 (2.1)	○
** Korea, Rep. of	40 (1.7)	○
Singapore	40 (1.7)	○
Hungary	39 (2.2)	○
Belgium (Flemish)	38 (1.9)	○
1 Lithuania	37 (1.7)	○
‡ United States	37 (1.7)	○
† Scotland	36 (2.7)	○
2 Israel	33 (2.1)	○
New Zealand	30 (2.4)	○
† Netherlands	28 (2.5)	○
† Hong Kong, SAR	28 (2.0)	○
Slovenia	27 (2.2)	○
Sweden	27 (1.9)	○
Malaysia	27 (1.7)	○
Chinese Taipei	27 (1.8)	○
Slovak Republic	26 (2.0)	○
Italy	23 (1.8)	
Latvia	22 (1.8)	
International Avg.	21 (0.3)	
Jordan	20 (1.8)	
Bahrain	18 (1.4)	▼
Norway	18 (1.4)	▼
Romania	16 (1.8)	▼
Russian Federation	15 (2.0)	▼
Egypt	14 (1.2)	▼
Cyprus	13 (1.4)	▼
1 Indonesia	12 (1.4)	▼
1 Serbia	12 (1.3)	▼
Chile	12 (1.1)	▼
Bulgaria	12 (1.7)	▼
Lebanon	11 (1.4)	▼
Philippines	11 (1.2)	▼
2 Macedonia, Rep. of	10 (1.5)	▼
Saudi Arabia	8 (1.8)	▼
1 ‡ Morocco	7 (1.2)	▼
South Africa	6 (1.2)	▼
Palestinian Nat'l Auth.	5 (0.7)	▼
Iran, Islamic Rep. of	4 (0.7)	▼
Tunisia	4 (0.6)	▼
Ghana	3 (1.0)	▼
Botswana	2 (0.8)	▼
Armenia	2 (0.6)	▼
Moldova, Rep. of	1 (0.5)	▼
¶ England	45 (2.5)	○
Benchmarking Participants		
Basque Country, Spain	19 (2.1)	
Indiana State, US	34 (3.3)	○
Ontario Province, Can.	36 (2.4)	○
Quebec Province, Can.	24 (2.1)	

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

○ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered fully correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

¶ Did not satisfy guidelines for sample participation rates (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

2 National Defined Population covers less than 90% of National Desired Population (see Exhibit A.6).

** Korea tested the same cohort of students as other countries, but later in 2003, at the beginning of the next school year.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.9: TIMSS 2003 High International Benchmark (550) of Mathematics Achievement – Example Item 3

MATHEMATICS Grade 8

An Item That Students Reaching the High International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

Content Area: Number

Description: Solves a one-step word problem involving division of a whole number by a unit fraction.

A scoop holds $\frac{1}{5}$ kg of flour. How many scoops of flour are needed to fill a bag with 6 kg of flour?

Answer: $6 \div \frac{1}{5}$

6×5

30 scoops

The answer shown illustrates the type of student response that was given full credit.

	Country	Percent Full Credit	
	Singapore	79 (1.9)	▲
†	Hong Kong, SAR	76 (1.8)	▲
	Chinese Taipei	75 (1.9)	▲
†	Netherlands	74 (2.1)	▲
**	Korea, Rep. of	68 (1.5)	▲
	Japan	62 (1.8)	▲
	Belgium (Flemish)	62 (2.2)	▲
	Sweden	60 (1.9)	▲
	Australia	53 (2.6)	▲
†	United States	52 (1.7)	▲
†	Scotland	51 (2.7)	▲
	Estonia	51 (2.0)	▲
	Latvia	51 (2.7)	▲
	Hungary	51 (2.1)	▲
	Russian Federation	49 (2.7)	▲
2	Israel	48 (2.3)	▲
	Malaysia	47 (2.2)	▲
	New Zealand	46 (3.2)	▲
	Slovenia	46 (2.1)	▲
	Armenia	45 (2.2)	▲
1	Lithuania	43 (2.3)	▲
	Slovak Republic	43 (2.0)	▲
	Norway	39 (2.1)	
	Romania	39 (2.8)	
	International Avg.	38 (0.3)	
1	Serbia	38 (2.0)	
	Bulgaria	38 (3.0)	
	Cyprus	37 (1.8)	
	Moldova, Rep. of	37 (2.7)	
	Italy	34 (2.1)	▼
1	Indonesia	26 (1.5)	▼
2	Macedonia, Rep. of	22 (2.0)	▼
	Iran, Islamic Rep. of	20 (1.9)	▼
	Tunisia	18 (1.4)	▼
	Egypt	17 (1.4)	▼
	Jordan	16 (1.5)	▼
	Lebanon	15 (1.4)	▼
	Chile	13 (1.1)	▼
	Philippines	13 (1.3)	▼
	Bahrain	11 (1.3)	▼
	Botswana	11 (1.1)	▼
	Palestinian Nat'l Auth.	10 (1.2)	▼
1 ‡	Morocco	8 (1.5)	▼
	South Africa	7 (1.3)	▼
	Saudi Arabia	7 (1.9)	▼
	Ghana	6 (1.0)	▼
¶	England	50 (3.1)	▲
Benchmarking Participants			
	Basque Country, Spain	42 (2.5)	
	Indiana State, US	56 (4.0)	▲
	Ontario Province, Can.	53 (2.2)	▲
	Quebec Province, Can.	61 (2.9)	▲

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered fully correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

¶ Did not satisfy guidelines for sample participation rates (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

2 National Defined Population covers less than 90% of National Desired Population (see Exhibit A.6).

** Korea tested the same cohort of students as other countries, but later in 2003, at the beginning of the next school year.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.10: TIMSS 2003 High International Benchmark (550) of Mathematics Achievement – Example Item 4

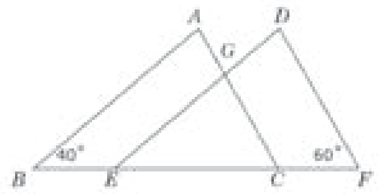
MATHEMATICS Grade 8

An Item That Students Reaching the High International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

Content Area: Geometry

Description: Uses properties of congruent triangles to find the measure of an angle.

In this figure, triangles ABC and DEF are congruent with $BC = EF$.



What is the measure of angle EGC?

Ⓐ 20°

Ⓑ 40°

Ⓒ 60°

● 80°

Ⓔ 100°

	Country	Percent Full Credit	
**	Korea, Rep. of	84 (1.4)	▲
†	Hong Kong, SAR	81 (1.6)	▲
	Japan	80 (1.4)	▲
	Singapore	79 (1.6)	▲
	Chinese Taipei	73 (1.9)	▲
	Estonia	67 (2.0)	▲
	Belgium (Flemish)	66 (1.7)	▲
	Latvia	63 (2.2)	▲
	Bulgaria	60 (2.6)	▲
2	Israel	57 (2.7)	▲
	Russian Federation	55 (2.7)	▲
	Lebanon	55 (2.2)	▲
†	Scotland	54 (2.7)	▲
	Slovak Republic	54 (2.5)	▲
1	Lithuania	51 (2.3)	▲
	Hungary	50 (2.4)	
	Australia	47 (2.1)	
	Egypt	47 (1.7)	
	Malaysia	47 (2.4)	
	International Avg.	46 (0.3)	
	Armenia	45 (2.4)	
	Moldova, Rep. of	45 (3.0)	
	Cyprus	44 (2.2)	
†	Netherlands	44 (2.5)	
1	Serbia	43 (1.9)	
	New Zealand	42 (3.6)	
	Jordan	42 (1.8)	▼
	Italy	42 (2.3)	
	Tunisia	41 (1.6)	▼
	Bahrain	41 (2.4)	▼
	Sweden	40 (2.1)	▼
	Palestinian Nat'l Auth.	39 (1.7)	▼
	Iran, Islamic Rep. of	37 (2.1)	▼
	Slovenia	37 (2.5)	▼
†	United States	36 (1.7)	▼
2	Macedonia, Rep. of	33 (2.4)	▼
	Norway	32 (2.1)	▼
1	Indonesia	31 (1.7)	▼
1 ‡	Morocco	31 (2.2)	▼
	Chile	30 (1.8)	▼
	Saudi Arabia	26 (2.5)	▼
	South Africa	21 (1.5)	▼
	Ghana	20 (1.6)	▼
	Botswana	20 (1.5)	▼
	Romania	18 (1.7)	▼
	Philippines	15 (1.3)	▼
¶	England	47 (2.8)	
Benchmarking Participants			
	Basque Country, Spain	32 (2.5)	▼
	Indiana State, US	30 (2.6)	▼
	Ontario Province, Can.	50 (2.6)	
	Quebec Province, Can.	69 (1.8)	▲

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

¶ Did not satisfy guidelines for sample participation rates (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

2 National Defined Population covers less than 90% of National Desired Population (see Exhibit A.6).

** Korea tested the same cohort of students as other countries, but later in 2003, at the beginning of the next school year.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.12: TIMSS 2003 Intermediate International Benchmark (475) of Mathematics Achievement – Example Item 5

An Item That Students Reaching the Intermediate International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

MATHEMATICS Grade 8

Content Area: Number

Description: Solves a word problem involving subtraction of a two-place decimal number from another.

Alice ran a race in 49.86 seconds. Betty ran the same race in 52.30 seconds. How much longer did it take Betty to run the race than Alice?

- ● 2.44 seconds
- Ⓑ 2.54 seconds
- Ⓒ 3.56 seconds
- Ⓓ 3.76 seconds

Country	Percent Full Credit	
Singapore	88 (1.0)	▲
** Korea, Rep. of	87 (1.1)	▲
Malaysia	81 (1.4)	▲
† Netherlands	81 (2.0)	▲
Hungary	80 (1.9)	▲
Chinese Taipei	80 (1.6)	▲
Japan	78 (1.6)	▲
Russian Federation	76 (1.8)	▲
† Hong Kong, SAR	75 (1.6)	▲
Slovak Republic	74 (2.1)	▲
† United States	74 (1.7)	▲
Slovenia	73 (2.3)	▲
Estonia	72 (1.8)	▲
Belgium (Flemish)	71 (1.8)	▲
† Scotland	71 (2.0)	▲
Moldova, Rep. of	69 (2.3)	▲
1 Serbia	68 (2.1)	▲
Latvia	67 (2.4)	▲
Bulgaria	66 (2.5)	
1 Lithuania	65 (2.3)	
Romania	64 (2.4)	
Tunisia	63 (2.0)	
Australia	63 (2.4)	
Sweden	63 (2.0)	
Italy	62 (2.1)	
Botswana	61 (1.7)	
International Avg.	61 (0.3)	
Lebanon	61 (2.3)	
Armenia	60 (2.2)	
2 Macedonia, Rep. of	59 (2.1)	
Cyprus	59 (1.8)	
Egypt	58 (1.7)	
2 Israel	58 (1.9)	
1 Indonesia	55 (2.0)	▼
New Zealand	53 (2.4)	▼
Jordan	46 (2.2)	▼
Norway	46 (2.5)	▼
Philippines	45 (2.2)	▼
1 ‡ Morocco	45 (2.6)	▼
Bahrain	45 (2.0)	▼
Iran, Islamic Rep. of	44 (1.9)	▼
Chile	42 (1.8)	▼
Palestinian Nat'l Auth.	37 (1.7)	▼
Ghana	32 (2.0)	▼
South Africa	29 (1.8)	▼
Saudi Arabia	19 (2.3)	▼
¶ England	54 (2.5)	▼
Benchmarking Participants		
Basque Country, Spain	64 (3.0)	
Indiana State, US	77 (2.2)	▲
Ontario Province, Can.	73 (2.4)	▲
Quebec Province, Can.	76 (1.9)	▲

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

¶ Did not satisfy guidelines for sample participation rates (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

2 National Defined Population covers less than 90% of National Desired Population (see Exhibit A.6).

** Korea tested the same cohort of students as other countries, but later in 2003, at the beginning of the next school year.

() Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.13: TIMSS 2003 Intermediate International Benchmark (475) of Mathematics Achievement – Example Item 6

An Item That Students Reaching the Intermediate International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

MATHEMATICS Grade 8

Content Area: Algebra

Description: Solves equation for missing number in a proportion.

If $\frac{12}{n} = \frac{36}{21}$, then n equals

- Ⓐ 3
- ● 7
- Ⓒ 36
- Ⓓ 63

Country	Percent Full Credit	
Singapore	93 (0.7)	▲
** Korea, Rep. of	89 (0.9)	▲
† Hong Kong, SAR	88 (1.2)	▲
Belgium (Flemish)	86 (1.4)	▲
† Netherlands	85 (1.8)	▲
Malaysia	83 (1.5)	▲
Chinese Taipei	83 (1.5)	▲
† United States	80 (1.1)	▲
Japan	79 (1.6)	▲
Hungary	79 (1.7)	▲
† Scotland	79 (1.9)	▲
Australia	76 (1.9)	▲
Slovak Republic	74 (2.0)	▲
Slovenia	72 (2.3)	▲
2 Israel	72 (2.0)	▲
Lebanon	71 (2.6)	▲
Russian Federation	71 (1.9)	▲
Estonia	71 (2.2)	▲
Latvia	70 (2.1)	▲
New Zealand	68 (2.3)	
Sweden	66 (2.1)	
Iran, Islamic Rep. of	66 (1.7)	
Italy	65 (2.1)	
Cyprus	65 (1.8)	
International Avg.	65 (0.3)	
Tunisia	64 (1.7)	
1 Lithuania	64 (2.1)	
1 Serbia	63 (2.1)	
Moldova, Rep. of	61 (2.5)	
Romania	61 (2.2)	▼
Bulgaria	59 (2.0)	▼
Norway	59 (2.1)	▼
1 Indonesia	58 (1.9)	▼
Egypt	58 (2.2)	▼
Armenia	54 (2.6)	▼
1 ‡ Morocco	54 (3.0)	▼
Jordan	53 (1.9)	▼
Palestinian Nat'l Auth.	52 (1.6)	▼
Philippines	52 (2.1)	▼
2 Macedonia, Rep. of	50 (2.3)	▼
Bahrain	44 (2.2)	▼
Chile	44 (2.0)	▼
Botswana	41 (1.7)	▼
Saudi Arabia	30 (2.2)	▼
Ghana	28 (1.6)	▼
South Africa	26 (1.5)	▼
¶ England	74 (2.6)	▲
Benchmarking Participants		
Basque Country, Spain	77 (2.3)	▲
Indiana State, US	83 (1.7)	▲
Ontario Province, Can.	86 (1.8)	▲
Quebec Province, Can.	88 (1.4)	▲

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

¶ Did not satisfy guidelines for sample participation rates (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

2 National Defined Population covers less than 90% of National Desired Population (see Exhibit A.6).

** Korea tested the same cohort of students as other countries, but later in 2003, at the beginning of the next school year.

() Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.15: TIMSS 2003 Low International Benchmark (400) of Mathematics Achievement – Example Item 7

An Item That Students Reaching the Low International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

MATHEMATICS Grade 8

Content Area: Number

Description: Selects two-place decimal closest to a given whole number.

Which of these numbers is closest to 10?

Ⓐ 0.10

● 9.99

Ⓒ 10.10

Ⓓ 10.90

	Country	Percent Full Credit	
†	Netherlands	97 (1.0)	▲
	Sweden	96 (1.1)	▲
	Estonia	96 (1.2)	▲
	Singapore	95 (1.1)	▲
1	Lithuania	95 (1.0)	▲
	Belgium (Flemish)	94 (1.4)	▲
**	Korea, Rep. of	94 (1.2)	▲
	Malaysia	93 (1.4)	▲
	Japan	92 (1.4)	▲
1	Serbia	91 (1.6)	▲
	Norway	91 (1.3)	▲
	Russian Federation	91 (1.2)	▲
	Latvia	90 (1.9)	▲
	Slovak Republic	90 (2.0)	▲
	Italy	90 (1.9)	▲
†	Hong Kong, SAR	89 (1.6)	▲
†	Scotland	89 (2.0)	▲
	Chinese Taipei	89 (1.5)	▲
	Cyprus	88 (2.0)	▲
	Hungary	88 (2.0)	▲
	Australia	88 (1.8)	▲
‡	United States	87 (1.1)	▲
	Slovenia	87 (2.2)	▲
	New Zealand	86 (2.0)	▲
	Bulgaria	85 (2.7)	▲
	Moldova, Rep. of	82 (2.5)	
2	Israel	81 (2.3)	
	Romania	79 (2.5)	
2	Macedonia, Rep. of	78 (2.7)	
	International Avg.	**77 (0.3)**	
	Tunisia	76 (2.3)	
1 ‡	Morocco	75 (3.1)	
1	Indonesia	74 (2.7)	
	Iran, Islamic Rep. of	69 (2.4)	▼
	Chile	67 (1.9)	▼
	Lebanon	67 (2.7)	▼
	Armenia	66 (2.6)	▼
	Jordan	55 (2.7)	▼
	Palestinian Nat'l Auth.	50 (2.7)	▼
	Bahrain	49 (3.2)	▼
	Egypt	48 (2.5)	▼
	Philippines	42 (2.8)	▼
	Botswana	40 (2.6)	▼
	Saudi Arabia	35 (2.6)	▼
	South Africa	30 (2.7)	▼
	Ghana	24 (2.4)	▼
¶	England	82 (2.5)	▲
	Benchmarking Participants		
	Basque Country, Spain	92 (2.0)	▲
	Indiana State, US	84 (3.2)	▲
	Ontario Province, Can.	91 (1.8)	▲
	Quebec Province, Can.	91 (1.8)	▲

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ Nearly satisfied guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

¶ Did not satisfy guidelines for sample participation rates (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

2 National Defined Population covers less than 90% of National Desired Population (see Exhibit A.6).

** Korea tested the same cohort of students as other countries, but later in 2003, at the beginning of the next school year.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.17: TIMSS 2003 Advanced International Benchmark (625) of Mathematics Achievement – Example Item 1

An Item That Students Reaching the Advanced International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

MATHEMATICS Grade 4

Content Area: Number

Description: Identifies the decimal representation for a fraction with a denominator of 10.

Which of these means $\frac{7}{10}$?

Ⓐ 70

Ⓑ 7

● 0.7

Ⓓ 0.07

NB. Het betreft vanaf hier de landenranking van de toets voor groep 6 (Grade 4).

	Country	Percent Full Credit	
	Singapore	95 (0.8)	▲
†	Hong Kong, SAR	78 (1.8)	▲
	Chinese Taipei	74 (1.8)	▲
	Belgium (Flemish)	73 (2.4)	▲
	Cyprus	65 (2.2)	▲
†	United States	62 (1.8)	▲
	Japan	60 (2.2)	▲
	Italy	58 (2.4)	▲
	Moldova, Rep. of	52 (2.6)	▲
	Philippines	49 (2.7)	▲
1	Lithuania	48 (2.6)	▲
†	England	46 (2.5)	
	International Avg.	**43 (0.4)**	
†	Australia	42 (3.0)	
	Armenia	42 (2.5)	
	Russian Federation	39 (2.7)	
	New Zealand	37 (2.0)	▼
†	Netherlands	29 (2.0)	▼
	Morocco	23 (2.2)	▼
†	Scotland	22 (2.1)	▼
	Norway	17 (1.6)	▼
	Hungary	17 (1.6)	▼
	Iran, Islamic Rep. of	16 (1.6)	▼
	Tunisia	15 (1.5)	▼
	Latvia	12 (1.6)	▼
	Slovenia	8 (1.8)	▼
	Benchmarking Participants		
	Indiana State, US	59 (3.6)	▲
	Ontario Province, Can.	47 (3.3)	
	Quebec Province, Can.	26 (2.6)	▼

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

1 National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

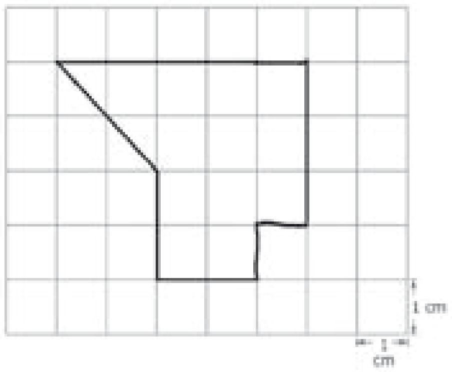
( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.18: TIMSS 2003 Advanced International Benchmark (625) of Mathematics Achievement – Example Item 2

An Item That Students Reaching the Advanced International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

Content Area: Measurement

Description: Completes an irregular figure on a grid so that it has a given area.



The squares in the grid above have areas of 1 square centimeter. Draw lines to complete the figure so that it has an area of 13 square centimeters.

The answer shown illustrates the type of student response that was given full credit.

Country	Percent Full Credit	
Japan	68 (2.1)	▲
Chinese Taipei	66 (1.8)	▲
† Hong Kong, SAR	52 (2.8)	▲
Singapore	43 (2.2)	▲
Latvia	43 (2.9)	▲
‡ Lithuania	40 (2.5)	▲
† Netherlands	37 (2.6)	▲
Moldova, Rep. of	35 (2.3)	▲
Cyprus	34 (2.3)	▲
Russian Federation	30 (2.4)	
International Avg.	29 (0.4)	
† Scotland	29 (2.4)	
† England	29 (2.3)	
† Australia	29 (2.2)	
Belgium (Flemish)	28 (2.2)	
Hungary	26 (2.0)	
Armenia	25 (2.3)	
† United States	24 (1.7)	▼
Italy	22 (2.0)	▼
New Zealand	15 (1.6)	▼
Iran, Islamic Rep. of	11 (1.6)	▼
Slovenia	11 (1.7)	▼
Norway	10 (1.6)	▼
Morocco	9 (1.9)	▼
Tunisia	9 (1.2)	▼
Philippines	5 (1.5)	▼
Benchmarking Participants		
Indiana State, US	17 (2.2)	▼
Ontario Province, Can.	38 (2.6)	▲
Quebec Province, Can.	35 (2.6)	▲

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered fully correctly by a majority of students reaching this benchmark.
† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).
‡ National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).
( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.20: TIMSS 2003 High International Benchmark (550) of Mathematics Achievement – Example Item 3

An Item That Students Reaching the High International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

Content Area: Patterns and Relationships

Description: Selects the expression that represents a situation involving multiplication.

$\square$ represents the number of magazines that Lina reads each week.
Which of these represents the total number of magazines that Lina reads in 6 weeks?

Ⓐ $6 + \square$

● $6 \times \square$

Ⓒ $\square + 6$

Ⓓ $(\square + \square) \times 6$

Country	Percent Full Credit	
Singapore	86 (1.4)	▲
Chinese Taipei	81 (1.5)	▲
† Hong Kong, SAR	76 (1.9)	▲
† United States	72 (1.2)	▲
† Netherlands	72 (2.7)	▲
Belgium (Flemish)	67 (1.6)	▲
Japan	67 (2.0)	▲
Russian Federation	66 (2.6)	▲
Latvia	66 (2.3)	▲
† England	66 (2.5)	▲
Cyprus	65 (2.0)	▲
Moldova, Rep. of	64 (2.4)	▲
‡ Lithuania	62 (2.3)	
Hungary	61 (2.2)	
Slovenia	60 (2.2)	
† Scotland	60 (2.2)	
International Avg.	58 (0.4)	
† Australia	56 (2.3)	
New Zealand	54 (1.7)	▼
Italy	50 (2.3)	▼
Armenia	46 (2.4)	▼
Philippines	38 (2.3)	▼
Norway	37 (2.1)	▼
Iran, Islamic Rep. of	34 (2.3)	▼
Morocco	29 (2.2)	▼
Tunisia	20 (2.0)	▼
Benchmarking Participants		
Indiana State, US	74 (2.0)	▲
Ontario Province, Can.	61 (2.5)	
Quebec Province, Can.	60 (2.4)	

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

* The item was answered correctly by a majority of students reaching this benchmark.
† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).
‡ National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).
( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.21: TIMSS 2003 High International Benchmark (550) of Mathematics Achievement – Example Item 4 (Part B)

An Item That Students Reaching the High International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

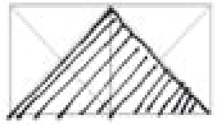
Mathematics Grade 4

Content Area: Geometry

Description: Part B–Makes and draws one square from four triangle tiles (square tiles divided diagonally into one white and one black triangle).

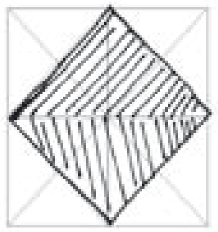
A. Use 2 of the triangle tiles to make one large black triangle. Then show what you did with your tiles by shading in your triangle below.

Shade in Your Triangle Here



B. Use all 4 triangle tiles to make a black square. Then show what you did with your tiles by shading in your square below.

Shade in Your Square Here



C. What fraction of the figure is shaded in part B above?

Answer: $\frac{1}{2}$

The answer shown illustrates the type of student response that was given full credit.

Country	Percent Full Credit	
Japan	71 (2.0)	○
† Netherlands	60 (3.2)	○
Russian Federation	57 (2.3)	○
† Lithuania	57 (2.3)	○
Belgium (Flemish)	55 (2.0)	○
Chinese Taipei	54 (1.5)	○
† England	54 (2.4)	○
† Australia	52 (3.0)	○
New Zealand	52 (2.3)	○
Italy	51 (2.9)	○
† Scotland	48 (2.9)	○
Norway	47 (3.1)	
Cyprus	47 (2.3)	○
† Hong Kong, SAR	46 (2.0)	○
Singapore	45 (2.3)	
Hungary	45 (2.1)	
Slovenia	44 (2.6)	
† United States	42 (1.7)	
International Avg.	42 (0.5)	
Moldova, Rep. of	37 (2.9)	
Latvia	33 (2.2)	▼
Tunisia	15 (1.5)	▼
Iran, Islamic Rep. of	13 (2.0)	▼
Armenia	10 (1.3)	▼
Philippines	7 (1.0)	▼
Morocco	5 (1.7)	▼
Benchmarking Participants		
Indiana State, US	42 (3.4)	
Ontario Province, Can.	49 (2.4)	○
Quebec Province, Can.	49 (2.9)	○

○ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered fully correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.23: TIMSS 2003 Intermediate International Benchmark (475) of Mathematics Achievement – Example Item 5

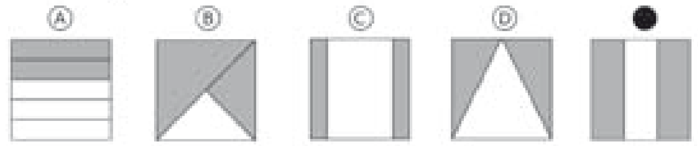
An Item That Students Reaching the Intermediate International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

Mathematics Grade 4

Content Area: Number

Description: Recognizes a familiar fraction represented by a figure with shaded parts (region model).

Which shows $\frac{2}{3}$ of the square shaded?



Country	Percent Full Credit	
Singapore	93 (1.0)	○
† Hong Kong, SAR	86 (1.7)	○
† United States	82 (1.1)	○
Chinese Taipei	81 (1.5)	○
Belgium (Flemish)	79 (1.8)	○
Japan	76 (1.5)	○
Cyprus	75 (1.8)	○
† Netherlands	73 (2.1)	○
† England	67 (2.2)	○
† Australia	62 (2.2)	○
Latvia	60 (2.8)	
New Zealand	59 (2.2)	
International Avg.	57 (0.4)	
Hungary	56 (2.7)	
† Lithuania	56 (2.2)	
Italy	55 (2.4)	
† Scotland	52 (2.2)	▼
Philippines	50 (2.3)	▼
Russian Federation	49 (2.8)	▼
Iran, Islamic Rep. of	47 (2.7)	▼
Moldova, Rep. of	43 (2.7)	▼
Slovenia	34 (2.5)	▼
Armenia	29 (2.2)	▼
Norway	29 (2.0)	▼
Morocco	13 (1.7)	▼
Tunisia	12 (1.6)	▼
Benchmarking Participants		
Indiana State, US	89 (2.2)	○
Ontario Province, Can.	69 (2.8)	○
Quebec Province, Can.	67 (2.6)	○

○ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

* The item was answered correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.24: TIMSS 2003 Intermediate International Benchmark (475) of Mathematics Achievement – Example Item 6

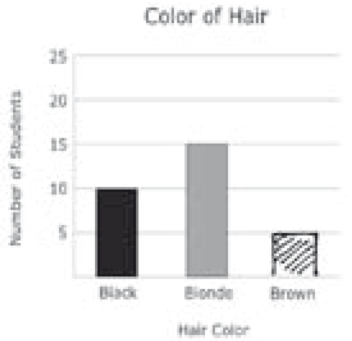
An Item That Students Reaching the Intermediate International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

4

Content Area: Data

Description: Completes a bar graph based on the solution of a word problem.

In a class of 30 students, 10 have black hair, 15 have blonde hair, and the rest have brown hair. Complete the graph below to show the number of students with brown hair.



The answer shown illustrates the type of student response that was given full credit.

Country	Percent Full Credit	
Belgium (Flemish)	93 (1.1)	▲
† Netherlands	93 (1.1)	▲
† Hong Kong, SAR	92 (1.0)	▲
Chinese Taipei	92 (1.1)	▲
Singapore	90 (1.2)	▲
Japan	90 (1.3)	▲
Latvia	88 (1.4)	▲
† Lithuania	87 (1.8)	▲
† England	86 (1.7)	▲
Hungary	84 (1.7)	▲
† Scotland	83 (1.8)	▲
Russian Federation	82 (2.4)	▲
† United States	82 (1.3)	▲
Cyprus	80 (1.3)	▲
New Zealand	80 (1.7)	▲
Slovenia	79 (2.3)	▲
† Australia	76 (2.1)	
Norway	75 (1.9)	
International Avg.	73 (0.4)	
Italy	71 (1.8)	
Moldova, Rep. of	67 (2.2)	▼
Armenia	50 (2.2)	▼
Philippines	29 (2.5)	▼
Iran, Islamic Rep. of	28 (2.3)	▼
Morocco	24 (3.1)	▼
Tunisia	21 (2.1)	▼
Benchmarking Participants		
Indiana State, US	84 (1.7)	▲
Ontario Province, Can.	85 (2.0)	▲
Quebec Province, Can.	83 (1.8)	▲

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

* The item was answered fully correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

Exhibit 2.26: TIMSS 2003 Low International Benchmark (400) of Mathematics Achievement – Example Item 7

An Item That Students Reaching the Low International Benchmark Are Likely to Answer Correctly*

MATHEMATICS Grade 4

Content Area: Number

Description: Multiply a two-digit by a one-digit whole number.

$15 \times 9 =$

Answer: 135

The answer shown illustrates the type of student response that was given full credit.

Country	Percent Full Credit	
Chinese Taipei	94 (1.0)	▲
Singapore	93 (1.0)	▲
† Hong Kong, SAR	91 (1.0)	▲
Russian Federation	90 (1.3)	▲
Moldova, Rep. of	88 (1.2)	▲
† Lithuania	87 (1.7)	▲
Japan	86 (1.6)	▲
† Netherlands	86 (1.5)	▲
Latvia	86 (1.9)	▲
Hungary	85 (1.6)	▲
Armenia	85 (1.4)	▲
Belgium (Flemish)	84 (1.4)	▲
Cyprus	76 (1.6)	▲
Italy	75 (2.0)	
† United States	73 (1.2)	
International Avg.	72 (0.4)	
Tunisia	68 (2.0)	
Slovenia	67 (2.6)	
Iran, Islamic Rep. of	61 (2.5)	▼
† England	59 (2.7)	▼
Philippines	59 (2.5)	▼
† Scotland	54 (2.2)	▼
† Australia	45 (2.4)	▼
New Zealand	41 (2.0)	▼
Morocco	36 (3.1)	▼
Norway	30 (1.9)	▼
Benchmarking Participants		
Indiana State, US	78 (2.3)	▲
Ontario Province, Can.	54 (2.7)	▼
Quebec Province, Can.	66 (2.3)	▼

▲ Country average significantly higher than international average

▼ Country average significantly lower than international average

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003

* The item was answered fully correctly by a majority of students reaching this benchmark.

† Met guidelines for sample participation rates only after replacement schools were included (see Exhibit A.9).

‡ National Desired Population does not cover all of International Desired Population (see Exhibit A.6).

( ) Standard errors appear in parentheses. Because results are rounded to the nearest whole number, some totals may appear inconsistent.

COLOFON

Deze uitgave is onderdeel van de eindrapportage van de Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen.

Het eindrapport bestaat uit drie delen: het hoofdrapport en deelrapporten voor respectievelijk taal en rekenen.

Het advies is uitgebracht in januari 2008.

Citaten
De uitspraken die in de rapporten zijn opgenomen zijn afkomstig van docenten en werden opgetekend tijdens een veldraadpleging.

Productiebegeleiding
Keijzer Communicatie, Enschede

Ontwerp en realisatie
Neerlandsvlak, Zutphen

Druk
Lulof druktechniek, Almelo

Postbus 2041
7500 CA Enschede

Informatie
Tel. 053 4840473
www.taalenrekenen.nl